20

社会的選択理論の諸相

同志社大学 経済学部

田中 靖人

E-mail: yatanaka@mail.doshisha.ac.jp

まえがき

本稿では社会的選択理論 (Social Choice Theory) の主要な定理，結果およびそれらに関連した結果について，オリジナルな論文（あるいは書物）またはよりわかりやすい証明を示している論文を取り上げる。筆者なりに内容を整理して教科書風に書くのではなく，できるだけ原論文の論旨に沿って説明するように心がけた。ただし記号の使い方などは変えている部分もある。

有名な定理やそれに準じる結果の証明を十分に理解することを目的としたい。

2005 年 2 月 28 日　田中靖人

目次

1 アローの一般可能性定理の証明 (鈴村興太郎 (2000, *Japanese Economic Review*))

本節の証明は backward induction proof of Arrow's theorem と名づけられている[*1]。

ある問題についての 3 つ以上，有限個の選択肢からなる集合を A，2 人以上，有限の人数からなる個人の集合（社会と呼ぶ）を N とする。各個人を i で表し，選択肢は x，y，z などで表す。各個人はそれぞれ選択肢について選好を持つ。選好は二項的に，すなわち 2 つの選択肢の組に関する選好として表現される。個人 i の選好を R_i で表す。xR_iy は個人 i が y より x を好むかまたは無差別であることを意味し，xP_iy，xI_iy はそれぞれ個人 i が y より x を好むこと，および x と y について無差別であることを意味する。P_i，I_i はそれぞれ R_i の非対称部分 (asymmetric part)，対称部分 (symmetric part) と呼ばれる。xR_iy は xP_iy または xI_iy であることを意味する。個人の選好は次の条件を満たすものとする。

反射性 (reflexivity)　すべての個人 i，任意の選択肢 x について xR_ix である。

完備性 (completeness)　すべての個人 i，任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について xR_iy または yR_ix である。

推移性 (transitivity)　すべての個人 i，任意の 3 つの選択肢の組 (x, y, z) について xR_iy かつ yR_iz ならば xR_iz である。この条件から以下の条件も導かれる。xP_iy かつ yP_iz ならば xP_iz，また xI_iy かつ yI_iz ならば xI_iz である（これらは補題 1.1 で示す)。

次の補題は鈴村の論文には含まれていないが確認のために証明しておく。

補題 1.1. 上記 R_i の推移性は P_i の推移性，P_i と I_i の推移性，I_i と P_i の推移性，I_i の推移性を意味する。

P_i と I_i の推移性，I_i と P_i の推移性の意味は証明を見ればわかる。

証明. (1). P_i の推移性：xP_iy，yP_iz であるが xP_iz ではない，すなわち zR_ix であると仮定してみよう。まず R_i の推移性により xR_iz である。したがって xI_iz でないことを示せばよい。

[*1] 本節は K. Suzumura, "Welfare economics beyond welfarist-consequentialism", *Japanese Economic Review*, vol. 51, pp. 1-32, 2000. の Appendix にもとづく。論文本体は取り上げていない。

これは zI_ix と同じ意味であるから，もし xI_iz であるとすれば xP_iy と合わせて R_i の推移性により zR_iy でなければならない。しかしこれは yP_iz と矛盾する。したがって xP_iz である。

(2). I_i と P_i の推移性：xI_iy，yP_iz であるが xP_iz ではない，すなわち zR_ix であると仮定してみよう。まず R_i の推移性により xR_iz である。したがって xI_iz でないことを示せばよい。これは zI_ix と同じ意味であるから，もし xI_iz であるとすれば xI_iy と合わせて R_i の推移性により zR_iy でなければならない。しかしこれは yP_iz と矛盾する。したがって xP_iz である。

(3). P_i と I_i の推移性：xP_iy，yI_iz であるが xP_iz ではない，すなわち zR_ix であると仮定してみよう。まず R_i の推移性により xR_iz である。したがって xI_iz でないことを示せばよい。これは zI_ix と同じ意味であるから，もし xI_iz であるとすれば yI_iz と合わせて R_i の推移性により yR_ix でなければならない。しかしこれは xP_iy と矛盾する。したがって xP_iz である。

ここまではほとんど同じ証明であった。

(4). I_i の推移性：xI_iy，yI_iz であるが xI_iz ではない，すなわち xP_iz または zP_ix であると仮定してみよう。まず xP_iz のケースを考える。すると yI_iz は zI_iy を意味するので xP_iz と合わせて上で証明した P_i と I_i の推移性により xP_iy でなければならない。しかしこれは xI_iy と矛盾する。同様であるが zP_ix のケースも考えてみよう。このときは yI_iz と合わせて I_i と P_i の推移性により yP_ix でなければならない。しかしこれも xI_iy と矛盾する。したがって xI_iz である。

☺

N に属するすべての人々の選好の組にもとづいて社会的な選好が導かれる。人々の選好の組み合わせをプロフィール (profile) と呼び，各プロフィールを p，p'，p'' などと表す。またプロフィール p，p'，p'' などにおける個人 i の選好を R_i，R'_i，R''_i などで表す。個人の選好の組から社会的選好を導くルールを社会（的）選択ルール (social choice rule) と呼ぶことにする（集団的選択ルール (collective choice rule) とも言われる）。特に社会的選好が二項的に表される場合，二項的社会選択ルール (binary social choice rule) と呼ぶ。プロフィール p，p'，p'' などにおいて二項的社会選択ルールによって導かれる社会的選好を R，R'，R'' などで表す。厳密な選好，無差別関係はそれぞれ P，I などと表される。「厳密な選好」とは選択肢間の無差別な関係ではないという意味である（以下同様）。二項的社会選択ルール（によって導かれる社会的選好）も上記の条件，反射性，完備性，推移性を満たすものとする。補題 1.1 は社会的選好にも当てはまる。以下の節においても同様の設定のもとに議論が進められる。

二項的社会選択ルールはさらに以下の条件を満たすことが求められる。

パレート原理 (Pareto principle) **あるいは弱いパレート原理** (Weak Pareto principle)　任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) についてすべての人々が y より x を好むならば社会的にも y より x が好まれる。

無関係選択肢からの独立性 (Independence of irrelevant alternatives)　任意の 2 つの選択肢の組

(x, y) についての社会的選好はそれらに関する人々の選好のみによって決まり，他の選択肢についての選好から影響を受けない。言い換えると x と y についての人々の選好に変化がない限り，その他の選択肢に関する誰かの選好が変っても x，y に関する社会的選好は変らない。

非独裁性 (Non-dictatorship)　社会選択ルールに独裁者がいないこと。独裁者とは，任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) についてその個人が y より x を好むならば，常に社会的にも y より x が好まれるような個人である（その人の無差別な選好が社会的選好に反映されるとまでは求めない)。

定義域の非限定性 (Unrestricted domain)　人々の選好には一切制約を加えないとう条件である[*2]。

アローの一般可能性定理（General possibility theorem，不可能性定理 (Impossibility theorem) とも呼ばれる）は次のように表現される。

定理 1.2. 3 つ以上の選択肢，2 人以上の個人からなる社会において上記のすべての条件を満たす二項的社会選択ルールはない。言い換えれば，「非独裁性」を除くすべての条件を満たす二項的社会選択ルールには必ず独裁者が存在する。

以上の準備のもとにアローの一般可能性定理を以下の手順で証明する（ここからが鈴村による証明である)。

補題 1.3 (Dictator Lemma（独裁者の補題）). 二項的社会選択ルールが「非独裁性」を除く上記の条件をすべて満たすものとする。ある個人 i と 2 つの選択肢 x，y（任意の選択肢ということではなくある 1 組の選択肢）があり，あるプロフィール p において個人 i が y より x を好み（$xP_i y$)，他のすべての人々（j で代表させる）が逆に x より y を好む（$yP_j x$）ときに社会的選好が xPy となるならば，その個人 i は独裁者である。

証明. x，y，z，w を異なる 4 つの選択肢とする。定理で述べられている p とは異なるプロフィール p' において人々の選好が次のようであるとする。

(1). 個人 i：$zP'_i xP'_i yP'_i w$
(2). それ以外（j で表す)：$zP'_j x$，$yP'_j x$，$yP'_j w$，z と w に関する選好は特定しない。

p と p' において x と y に関する人々の選好は変っていないので無関係選択肢からの独立性により $xP'y$ でなければならない。またパレート原理によって $zP'x$，$yP'w$ である。したがって推移性により $zP'w$ が導かれる（$zP'x$，$xP'y$，$yP'w$ により)。p' において z と w に関する個人 i の選好は $zP'_i w$ であるのに対して他の人々の選好は特定されていない。したがって無関係選択肢からの独

[*2] domain とは数学の関数が定義される「定義域」と同じ意味で社会選択ルールが定義されるような人々の選好の範囲を表す。これより少し弱い条件として Free triple property と呼ばれるものがある。Free triple property は任意の 3 つの選択肢からなる組に関する人々の選好に制約を加えないという条件であり，アローの定理，ウィルソンの定理，寡頭制定理などの証明にはその条件で十分であるが，証明の仕方によっては「定義域の非限定性」，あるいは少なくとも 4 つの選択肢からなる組に関する人々の選好に制約を加えないという条件が必要となる。条件としてさほど大きくは違わない。

立性により，他の人々の選好にかかわらず個人 i が w より z を好めば社会的にもそのようになるので個人 i は z と w に関して（zPw の方向で）独裁者である。z，w は x，y 以外の任意の選択肢であったから個人 i は x，y 以外のすべての選択肢についてどちらの方向にも独裁者であることが言える[*3]。z，w と x，y を入れ替えて同じ議論を繰り返せば個人 i は x と y についてもどちらの方向にも独裁者であることが示される。

残るは z，w の一方が x または y と一致するケースである。選択肢が 3 つしかない場合にはそのようなケースしかない。証明の手順は同様である[*4]。z が x と一致するものとし次のようなプロフィール p^* を考える。

(1). 個人 i ：$xP_i^* yP_i^* w$
(2). それ以外（j で表す）：$yP_j^* x$，$yP_j^* w$，x と w に関する選好は特定しない。

p と p^* において x と y に関する人々の選好は変っていないので無関係選択肢からの独立性により xP^*y でなければならない。またパレート原理によって yP^*w であるから推移性により xP^*w が導かれる（xP^*y と yP^*w により)。p^* において x と w に関する個人 i の選好は xP_i^*w であるのに対して他の人々の選好は特定されていない。したがって無関係選択肢からの独立性により，他の人々の選好にかかわらず個人 i が w より x を好めば社会的にもそのようになる。次に（ほとんど同じ議論であるが）以下のようなプロフィール p'' を考える。

(1). 個人 i ：$wP_i'' xP_i'' y$
(2). それ以外（j で表す）：$yP_j'' x$，$wP_j'' x$，y と w に関する選好は特定しない。

p と p'' において x と y に関する人々の選好は変っていないので無関係選択肢からの独立性により $xP''y$ でなければならない。またパレート原理によって $wP''x$ であるから推移性により $wP''y$ が導かれる（$wP''x$ と $xP''y$ により)。p'' において y と w に関する個人 i の選好は $wP_i'y$ であるのに対して他の人々の選好は特定されていない。したがって無関係選択肢からの独立性により，他の人々の選好にかかわらず個人 i が y より w を好めば社会的にもそのようになる。上記 p^* における議論で x と w を入れ替えると個人 i が x より w を好めば社会的にもそのようになることが言える。したがって個人 i は x と任意の w について独裁者である。また p'' における議論で y と w を入れ替えると個人 i が w より y を好めば社会的にもそのようになることが言える。したがって個人 i は y と任意の w について独裁者である。以上のことから個人 i はあらゆる選択肢の組について独裁者であることが示された[*5]。

[*3] 「どちらの方向にも」とは y より x を好む場合も x より y を好む場合も個人 i の選好によって社会の選好が決まるという意味である。なおこの補題の仮定「個人 i が y より x を好み他のすべての人々が x より y を好むときに社会的選好が xPy となる」とは個人 i が x と y について（xPy の方向で）独裁者であることを意味するものではない。この仮定では個人 i とそれ以外の人々が x と y について逆の選好を持つようになっているが，独裁者とは**他の人々の選好に関係なく**厳密な自分の選好が社会の選好となる個人のことである。

[*4] 以下の証明は鈴村の論文では省略されている。

[*5] 選択肢が 3 つしかない場合は最初の 4 つの選択肢の場合の議論が成り立たないので個人 i が x と y に関して独裁者であることを確認しなければならない。p^* における議論で y と w を入れ替えると個人 i が y より x を好めば社会的にもそのようになることが言える。このとき次のようなプロフィール p^1 を考え，個人 i が x と w について独裁者であることを用いる。

以上で証明が終わった。 ☺

補題 1.4 (Reduction Lemma[*6]). 3 人以上 n 人の社会において「非独裁性」を含む上記のすべての条件を満たす二項的社会選択ルールが存在するならば，1 人少ない $n-1$ 人の社会においてもすべての条件を満たす二項的社会選択ルールが存在する。

証明. まず n 人の人々の内個人 n があらゆる選択肢について無差別であるような選好を持つ場合を考え，そのようなプロフィールを p とする。誰を個人 n とするかは任意である。個人 n を除いた $n-1$ 人の人々からなる社会における同一のプロフィールも p で表す。n 人の社会に対して定義される二項的社会選択ルールを f_n とし，個人 n がすべてについて無差別であるようなプロフィールにおいて f_n が導く社会的選好をそのまま個人 n を除く $n-1$ 人の社会における（限定されないプロフィールに対する）社会的選好とするような二項的社会選択ルールを f_{n-1} で表す。このとき f_n が無関係選択肢からの独立性，推移性を満たすならば f_{n-1} も満たすことが明らかに言える。しかし上記の個人 n の選好はパレート原理の前提とは異なるので f_n がパレート原理を満たしても f_{n-1} は満たさないかもしれない。また f_n が独裁者を持たないとしても f_{n-1} が独裁者を持っているかもしれない。これらの性質は自明ではないので証明しなければならない。

(1). まず f_{n-1} が非独裁性を満たす（独裁者を持たない）ことを示す。個人 d が f_{n-1} の独裁者であると仮定しよう。x，y を 2 つの選択肢とし，（個人 n を除く）$n-1$ 人の社会における次のようなプロフィール p' を考える。個人 n の選好はすべてについて無差別であるような選好に固定されている。

(i) 個人 d：$xP'_d y$

(ii) それ以外（j で表す）：$yP'_d x$

個人 d は独裁者であるから f_{n-1} について $xP'y$ である。したがって（個人 n がすべてに無差別であるような）同じプロフィールに対して f_n についても $xP'y$ でなければならない。x，y 以外の選択肢 z，w をとり $n-1$ 人の社会における次のようなプロフィール p'' を考える。

(i) 個人 d：$xP''_d yP''_d zP''_d w$

(ii) それ以外（j で表す）：$yP''_d zP''_d wP''_d x$

さらにこのプロフィール p'' においては個人 n が $wP''_n xI''_n yP''_n z$ という選好を持つものとする。無関係選択肢からの独立性とパレート原理によって f_n について $xP''y$ かつ $yP''z$ であるから推移性によって $xP''z$ となる[*7]。完備性により f_n について $xP''w$，$wR''x$ のいずれ

---

(1). 個人 i：$xP_i^1 wP_i^1 y$

(2). それ以外（j で表す）：$wP_j^1 x$，$wP_j^1 y$，x と y に関する選好は特定しない。

さらにこの p^1 における議論で x と y を入れ替えると個人 i が x より y を好めば社会的にもそのようになることが言える。このときは次のようなプロフィール p^2 を考え，個人 i が y と w について独裁者であることを用いる。

(1). 個人 i：$yP_i^2 wP_i^2 x$

(2). それ以外（j で表す）：$wP_j^2 x$，$wP_j^2 y$，x と y に関する選好は特定しない。

以上のようにして個人 i が x と y に関して独裁者であることが示される。

*6 敢えて訳さない。

*7 f_n は個人 n の特定の選好に対してだけではなくすべての場合について定義されている。

かが成り立つ。$xP''w$ の場合は「独裁者の補題」により個人 d が f_n の独裁者となる。$wR'x$ の場合は推移性によって $wP''z$ が得られ，やはり「独裁者の補題」によって個人 n が f_n の独裁者となる。しかし f_n は独裁者を持たない二項的社会選択ルールとして定義されているので矛盾であるから，f_{n-1} にも独裁者が存在してはならない。

選択肢が 3 つしかない場合は 3 つ目の選択肢を z として次のようなプロフィールを p'' とする（以下は筆者による補足である)。

(i) 個人 d：$xP''_d yP''_d z$

(ii) それ以外（j で表す)：$yP''_i zP''_i x$

このとき個人 n は $zP''_n xI''_n y$ という選好を持つものとする。無関係選択肢からの独立性によって f_n について $xP''y$ である，完備性により f_n について $xP''z$，$zR''x$ のいずれかが成り立つ。$xP''z$ の場合は「独裁者の補題」により個人 d が f_n の独裁者となる。$zR'x$ の場合は $xP''y$ と合わせて推移性によって $zP''y$ が得られ，やはり「独裁者の補題」によって個人 n が f_n の独裁者となる。しかし f_n は独裁者を持たない二項的社会選択ルールとして定義されているので矛盾であるから，f_{n-1} にも独裁者が存在してはならない[*8]。

(2). 次に f_{n-1} がパレート原理を満たすことを示す。f_{n-1} がパレート原理を満たさないものと仮定してみよう。そうするとある 2 つの選択肢 x，y について，$n-1$ 人の社会においてすべての人々が y より x を好むときに（そのようなプロフィールを p' とする）社会的選好が $yR'x$ となるような場合がある。x，y 以外の選択肢 z をとり個人 n を含む n 人の社会における次のようなプロフィール p^1 を考える。

(i) 個人 n：$zP^1_n xI^1_n y$

(ii) それ以外（i で表す)：$xP^1_i zP^1_i y$

無関係選択肢からの独立性により f_n について yR^1x である（f_{n-1} についてそうであり，個人 n は依然として x と y について無差別である)。f_n に関するパレート原理によって zP^1y であるから，推移性により f_n について zP^1x が導かれる。そのとき「独裁者の補題」によって個人 n が f_n の独裁者となってしまう。f_n は独裁者を持たないと仮定したので f_{n-1} はパレート原理を満たさなければならない。

☺

以上 2 つの補題を用いてアローの一般可能性定理を証明する。

アローの一般可能性定理の証明. もし 3 人以上からなる社会にすべての条件を満たす二項的社会選択ルールが存在するならば Reduction Lemma を繰り返し適用することによって 2 人だけの個人からなる社会にもそのような二項的社会選択ルールが存在することが言える。その 2 人を個人 1，2 とする。あるプロフィール p において 2 つの選択肢 x，y について 2 人の選好が次のようであると仮定する。

[*8] 選択肢が 4 つ以上の場合にも z と w の両方を考える必要はないように思われるがどうであろうか？いずれにせよ原論文を修正はしない。

(1). 個人 1：xP_1y
(2). 個人 2：yP_2x

社会的選好が完備性を満たすのでこのとき xRy か yPx のいずれかである。後者の場合「独裁者の補題」によって個人 2 が独裁者となるから xRy と仮定する。x，y 以外の選択肢を z とし，p とは別のプロフィール p' において 2 人の選好が次のようであるとする。

(1). 個人 1：$xP'_1yP'_1z$
(2). 個人 2：$yP'_2zP'_2x$

するとパレート原理によって社会的選好は $yP'z$ であり，さらに無関係選択肢からの独立性により $xR'y$ である。したがって推移性（P_i の推移性または I_i と P_i の推移性）により $xP'z$ でなければならない。そのとき「独裁者の補題」によって個人 1 が独裁者となる。

以上によって定理が示された。 ☺

2 アローの一般可能性定理の別の証明 3 種 (Geanakoplos(2005, *Economic Theory*))

2.1 若干の準備

続いて Geanakoplos(2005) による 3 種類のアローの一般可能性定理の証明を紹介する。個人の選好，社会的選好などを表す記号は前節と共通である[*9]。まず言葉をいくつか定義する。

pivotal　あるプロフィール p において 2 つの選択肢 x，y について，ある個人 i 以外の人々の選好が変らず，その個人 i の選好において x が y より厳密に上位に位置するとき，および逆に y が x より厳密に上位に位置するとき，社会的選好においてもそのようになるならば個人 i は p において x，y について pivotal であると言う。

無関係選択肢からの独立性を仮定するならば問題となるのは x と y に関する選好だけであることに注意されたい。

extremely pivotal　あるプロフィール p において，ある選択肢 x について個人 i が x とその他のすべての選択肢との組について pivotal であるならば，個人 i は p において x について extremely pivotal であると言う。

このとき個人 i のみの選好の変化によって x を社会的選好の最上位に持って行くことができる。

local dictator　あるプロフィール p において，ある個人 i がすべての選択肢の組について pivotal であるとき p における local dictator であると言う[*10]。

あらゆるプロフィールにおいて local dictator であるような個人がいれば，それが独裁者で

[*9] 本節は J. Geanakoplos, “Three brief proofs of Arrow’s impossibility theorem”, *Economic Theory*, vol. 26, pp. 211-215, 2005. にもとづく。
[*10] 「局所的独裁者」とでも訳せる。

ある。

ここまではだんだん意味が強くなっている。

neutrality(中立性)　すべての選択肢が同じように扱われているとき neutrality（中立性）が成り立つと言う。

いささか曖昧であるが以下の議論でその意味が明らかになるであろう。

2.2　第 1 の証明

アローの定理の証明のためにいくつかの補題を示す。

補題 2.1 (Extremal Lemma). ある選択肢 x について，x を最も好むような選好を持っている人々と，逆に x を最も好まない（最も嫌う）選好を持っている人々に分かれているとき，社会的選好において x は厳密に最上位に位置するかかまたは厳密に最下位に位置する。

証明. y，z を x 以外の選択肢として，補題の仮定を満たすようなあるプロフィールにおいて社会的選好が yRx，xRz となっていると仮定する。各個人の選好において x は最上位または最下位に位置しているので x と y の関係，x と z の関係を変えずに z を y よりも上に持って行くことができる。そのとき無関係選択肢からの独立性によって社会的選好が yRx，xRz であることに変りはない。推移性によって社会的選好は yRz となる。一方パレート原理によって zPy でなければならず矛盾が生じるから社会的選好において x は厳密に最上位に位置するかかまたは厳密に最下位に位置していなければならない。 ☺

補題 2.2. あるプロフィールにおいて任意の選択肢 x について extremely pivotal な個人が存在する。

証明. 任意の選択肢 x がすべての人々の選好において厳密に最下位に位置するようなプロフィールを考える。他の選択肢に関する選好は特定しない。そのときパレート原理によって社会的選好においても x は厳密に最下位に位置する。その状態から 1 人 1 人の選好が適当な順序で，他の選択肢に関する選好は変らず x が厳密に最上位に位置するようなものに変って行くものとする。Extremal Lemma によって社会的選好において x は最上位に位置するか最下位に位置するかのいずれかであるが，全員の選好が x を最も好むものになればパレート原理によって社会的選好もそうなるので，ある人の選好が変化したときに初めて x が社会的選好の最上位に位置するようになる個人が存在する。その個人を i とする。i の手前までの人の選好が変化したときのプロフィールを p^1，i の選好が変化したときのプロフィールを p^2 とする。このとき個人 i の選好において x は最下位から最上位に移っているから他のすべての選択肢との関係を逆転させ，社会的選好においても同じ変化が起きているので個人 i はプロフィール p^1 において x について extremely pivotal でる。

☺

補題 2.3. 前の補題でその存在を証明した extremely pivotal な個人 i は x を含まないすべての選択肢の組について独裁的である。すなわち，あらゆるプロフィールにおいて x 以外の任意の選択肢

y，z について yP_iz ならば他の人々の選好に関わらず社会的選好も yPz となる。

証明. x 以外のある選択肢 y を任意にとり，上記のプロフィール p^2 をもとに次のようなプロフィール p^3 を作る。

(1). 個人 i：x，y 以外の任意の選択肢 z について $yP_i^3xP_i^3z$
(2). それ以外（j で表す）：x の位置は p^1 および p^2 における選好と同じで他の選択肢に関する選好は任意

無関係選択肢からの独立性によって，p^3 において x と y に関する社会的選好は yP^3x（p^1 においても p^3 においても x と y に関する人々の選好は同じだから）であり，同様に x と z に関する社会的選好は xP^3z（p^2 においても p^3 においても x と z に関する人々の選好は同じだから）である。したがって推移性により yP^3z を得る。このとき個人 i は z より y を好み，他の人々の y と z に関する選好は特定されていないので無関係選択肢からの独立性によって個人 i が z より y を好む限り社会的にも z より y が好まれる。よって個人 i は y と z について独裁者である。 ☺

アローの定理の証明. 最後に上の個人 i が x を含む選択肢の組についても独裁的であることを示そう。x 以外のある選択肢 y をとり人々が y について Extremal Lemma における x と同様の選好を持つものとする。すると補題 2.3 により y 以外の選択肢の組について独裁的な個人が存在する。その個人を $i(y)$ とする。$i(y)$ は x と z（x，y 以外のある選択肢）の組についても独裁者である。一方補題 2.2 において個人 i はプロフィール p^1 と p^2 の間で自らの選好の変化によって x と z に関する社会的選好に影響を与えている（p^1 から p^2 への変化によって x は社会的選好の再下位から最上位に移る）。個人 i 以外の人が x と z に関する独裁者であればそのようなことは起こらない。したがって個人 $i(y)$ は i 自身である。よって個人 i がすべての選択肢の組について独裁者であることが示された。 ☺

2.3 第 2 の証明

まず次の補題を示す。

補題 2.4. 選択肢を x_1，x_2，$\cdots$，x_m として次のような選好の組を考える。

$$
\begin{aligned}
&\pi_1：x_1 P_i x_2 P_i \cdots P_i x_m \\
&\pi_2：x_2 P_i x_3 P_i \cdots P_i x_m P_i x_1 \\
&\cdots \\
&\pi_k：x_k P_i x_{k+1} P_i \cdots P_i x_{k-2} P_i x_{k-1} \\
&\pi_{k+1}：x_{k+1} P_i x_{k+2} P_i \cdots P_i x_{k-1} P_i x_k \\
&\cdots \\
&\pi_m：x_m P_i x_1 P_i \cdots P_i x_{m-2} P_i x_{m-1}
\end{aligned}
$$

$\cdots$ の部分も選択肢は番号順に並んでいる（x_m の 1 つ下は x_1 となるように）。これらの選好は π_1

から始めて一番上の選択肢が一番下になるように順々に並び替えたものである。また π_k で表される選好とまったく逆の順になっている選好を $-\pi_k$ とする。これらの選好において互いに無差別となる選択肢の組はない。各個人がこのように表される選好の内いずれかの選好を持つものとする。すべての人々が選好 π_1 を持つプロフィールを p_1 とするとパレート原理によって社会的選好も π_1 と同じものになる。さらに社会的選好が π_1 と一致するようなプロフィールの内で π_1 の選好を持つ人の数が最も少ないプロフィールを $\bar{p}$ とすると，$\bar{p}$ において local dictator が存在する。

証明. 誰の選好も π_1 と一致しなければパレート原理によって社会的に x_1 より x_m が好まれるので，少なくとも 1 人の個人が選好 π_1 を持っていなければならない。その内の 1 人を i で表す。以下ではこの個人 i が $\bar{p}$ における local dictator であることを示す。

$\bar{p}$ において個人 i の選好がある $k(1 \leqq k \leqq m)$ について π_{k+1} に変ったと仮定し，そのようなプロフィールを $\bar{p}'$ とする。x_1 から x_k までの選択肢に関する人々の選好，および x_{k+1} から x_m までの選択肢に関する人々の選好に変化はないので無関係選択肢からの独立性により $\bar{p}$ と同様に社会的に $x_1\bar{P}'x_2\bar{P}'\cdots\bar{P}'x_k$ および $x_{k+1}\bar{P}'x_{k+2}\bar{P}'\cdots\bar{P}'x_m$ となる。このとき $x_k\bar{P}'x_{k+1}$ であれば完全に $\bar{p}$ と社会的選好が一致してしまう。しかし $\bar{p}$ は社会的選好が π_1 と一致するプロフィールの内で選好 π_1 を持つ人々の数が最も少ないものであったから，（$\bar{p}$ において選好 π_1 を持つ）個人 i の選好の変化によって社会的選好が変らなければならない。したがって $x_{k+1}\bar{R}'x_k$ である（ただし $x_k\bar{I}'x_{k+1}$ の場合は推移性によって $x_1\bar{P}'x_m$ となる）。

次に $\bar{p}$ において個人 i の選好が π_{k+1} ではなく $-\pi_1$ に変ったと仮定し，そのようなプロフィールを $\tilde{p}$ とする。$-\pi_1$ は π_1 とまったく逆向きの選好（$x_m P_i x_{m-1} P_i \cdots P_i x_2 P_i x_1$）を表す。$\pi_{k+1}$ と $-\pi_1$ とでは x_k と x_{k+1} の組について人々の選好が一致する。したがって無関係選択肢からの独立性により $x_{k+1}\tilde{R}x_k$ が得られる。x_k，x_{k+1} は任意であるから $k = 1$ から $m-1$ まで考えると $x_m\tilde{R}x_{m-1}\tilde{R}\cdots\tilde{R}x_2\tilde{R}x_1$ となる[*11]。もしここである k について $x_k\tilde{I}x_{k+1}$ であれば無関係選択肢からの独立性によって $\bar{p}'$ においても $x_k\bar{I}'x_{k+1}$ でなければならない。上で見たようにそれは $x_1\bar{P}'x_m$ を意味するが，そのとき無関係選択肢からの独立性によって $\tilde{p}$ においても $x_1\bar{P}'x_m$ である。しかしこれは $x_m\tilde{R}x_{m-1}\tilde{R}\cdots\tilde{R}x_2\tilde{R}x_1$ と矛盾する。したがって各 k について $x_{k+1}\tilde{P}x_k$ でなければならず全体として $x_m\tilde{P}x_{m-1}\tilde{P}\cdots\tilde{P}x_2\tilde{P}x_1$ が得られる。よって $\bar{p}$ において個人 i がその選好を全体的に逆転させることによってすべての選択肢の組について社会的選好が逆転して個人 i の変化した後の選好と一致するから，個人 i は $\bar{p}$ における local dictator である。 ☺

アローの定理の証明. 各個人の選好において無差別な関係が多くても 1 つであるようなプロフィールを「ほとんど厳密なプロフィール」と呼ぶことにする。また各個人の選好において無差別な関係がまったくないプロフィールを「厳密なプロフィール」と呼ぶ[*12]。ほとんど厳密なプロフィール p をとり個人 i が p の local dictator であるとする。p において i 以外のある 1 人の個人（j で表す）の選好においてある選択肢を半分だけ上位に上げてできるプロフィールを p' とし，その p' も

[*11] $k = 1$ から $m-1$ まで考えるとは，$\bar{p}$ において個人 i の選好が π_2 に変った場合から π_m に変った場合まで考えるということである。各 k について π_{k+1} と $-\pi_1$ とでは x_k と x_{k+1} の組について人々の選好が一致するので全体として $x_m\tilde{R}x_{m-1}\tilde{R}\cdots\tilde{R}x_2\tilde{R}x_1$ が得られる。

[*12] 「厳密なプロフィール」も「ほとんど厳密なプロフィール」に含まれる。

ほとんど厳密であるとする。「半分だけ上位に上げる」とは，xI_jy が xP'_jy に変化したり，yP_jx が xI'_jy に変化したりすることである。前者の場合 p' において個人 j にとって無差別な関係はなくなり，後者の場合 p においてそのようなものはなかったことになる。これらの場合ともに x が半分だけ上位に上がっている。個人 i が p' の local dictator でもあることを示そう。1 人の人の選好においてある選択肢が半分だけ上位に上がるような変化があったとしても，その変化に関連する x と y 以外の選択肢の組についての人々の選好に変化はないので，無関係選択肢からの独立性によりそれらに関する社会的選好は変らない。p，p' のそれぞれにおいて，上のような x，y とそれ以外のある選択肢 z について個人 i の選好のみが x より z を，z より y を好むように変化したプロフィールをそれぞれ p^1，p^2 とする。個人 i が p の local dictator であるから p^1 において社会的選好は yP^1zP^1x であり，無関係選択肢からの独立性によって p^2 における社会的選好も yP^2zP^2x となる（y と z，x と z の組について社会的選好は変らない。推移性により yP^2x となる。）。このことは，x が半分上位に上がるような個人 $j(\neq i)$ の選好の変化によって i が持つ local dictator としての力がいささかも損なわれないということを意味している。$\bar{p}$ は厳密なプロフィールであるから，$\bar{p}$ もとにして上記のような選好の変化を考えると，任意の選択肢の組 (x, y) についてどのようなプロフィールも作ることができる（そのとき (x, y) 以外の選択肢の組については無差別な人はいない）。そしてそのようなプロフィールのすべてにおいて i は local dictator である。これがすべての選択肢の組について成り立つので，無関係選択肢からの独立性により i は独裁者である。　☺

2.4　第 3 の証明

まず次の補題を示す。

補題 2.5 (Strict Neutrality Lemma（厳密な中立性の補題）). 2 種類の選択肢の組 (x, y)，(z, w) をとる。一部，あるいは全体が一致してもよい[*13]。あるプロフィール p において各個人が y より x を厳密に好むかまたは x より y を厳密に好むかであり，また別のプロフィール p' において各個人が z と w について p における x と y についての選好と同じ選好（z が x に，w が y に対応する）を持っているとする。そのとき p における x と y に関する社会的選好と p' における z と w に関する社会的選好とは一致し，かつ厳密なもの（無差別ではない）である。

証明. p において社会的選好が xRy（xPy または xIy）であるとする。x，y 以外のある選択肢を u とし，x，y，u 以外のある選択肢を v として (z, w) が (x, u)，(u, y)，(u, v) のいずれかと，選択肢の組として順序を含めて一致するものとする。ここで z が x のすぐ上に位置し（x と z が異なるとき），w が y のすぐ下に位置する（y と w が異なるとき）ような選好からなるプロフィール p' を考える。x と y に関する選好は p と同じである。そのとき x と y に関する人々の選好は厳密なのでこれらの 4 つの選択肢について以下のような選好があり得る。

(1). $zP'_ixP'_iyP'_iw$
(2). $yP'_iwP'_izP'_ix$

[*13] 例えば x と z が同じでもよいという意味。

このときパレート原理によって社会的に $zP'x$（x と z が異なるとき）かつ $yP'w$（y と w が異なるとき）であり，無関係選択肢からの独立性によって xRy である。また z と x が一致し同時に w と y が一致することはないので，推移性により $zP'w$ を得る[*14]。ここで z が x のすぐ下に位置し（x と z が異なるとき），w が y のすぐ上に位置する（y と w が異なるとき）ような選好からなるプロフィール p'' を考える。x と y に関する選好は p と同じであり，z と w に関する選好は p' と同じである。そのときこれら 4 つの選択肢について以下のような選好があり得る。

(1). $xP''_i zP''_i wP''_i y$
(2). $wP''_i yP''_i xP''_i z$

無関係選択肢からの独立性によって $zP''w$，パレート原理によって $xP''z$ かつ $wP''y$ であるから $xP''y$ が得られる。p'' における x と y に関する選好は p と同じであったので無関係選択肢からの独立性によって xPy が導かれる。これで x と y に関する選好が厳密であることが証明された。yRx と仮定した場合も同様である[*15]。p' における z と w に関する人々の選好は x と y に関する選好と同じであるから補題がほぼ証明された[*16]。しかし x が w と一致する場合と y が z と一致する場合が残っている。上で証明した結果から，まず (x,y) と (x,z) について人々の選好が一致する場合に，また (x,y) と (w,y) について人々の選好が一致する場合に社会的な選好も一致する。次にそれぞれのケースから (x,z) と (y,z) について人々の選好が一致する場合に，また (w,y) と (w,x) について人々の選好が一致する場合に社会的な選好も一致することが言える。さらに (y,z) と (y,x) について人々の選好が一致する場合に社会的な選好も一致することが言える。以上で証明が終わった ☺

アローの定理の証明. 2 つの選択肢 x，y をとりすべての人々が x より y を好むようなプロフィールを p とする。個人 1 から始めて（適当に番号をつける）x が y より上になるようにその選好が順に変化していくとする。パレート原理によって最初は社会的に y が x より上にある（yPx）が，誰かの選好が変化したときに社会的に x が y より上になる（xPy）ときがある（Strict Neutrality Lemma によって無差別にはならない）。その個人を i とする。Strict Neutrality Lemma によって (x,y) について成り立つことが (y,x) の組についても成り立つので，i は自分の選好が変化する前のプロフィールにおいて x と y について pivotal である（両方向に決定する力がある）。個人 i の選好が変った後のプロフィールを p^i，変る前のプロフィールを p^{i-1} とする。

[*14] 仮定により (z,w) は (x,u)，(u,y)，(u,v) のいずれかと一致する。z と x が一致するときは w は y とは異なる u と一致しなければならず，w が y と一致するならば z は x と異なる u と一致しなければならない。

[*15] p' として
(1). $xP'_i zP'_i wP'_i y$
(2). $wP'_i yP'_i xP'_i z$
となるプロフィールを考えると $wP'y$，$xP'z$，$yR'x$ より $wP'z$ を得る。さらに p'' として
(1). $zP''_i xP''_i yP''_i w$
(2). $yP''_i wP''_i zP''_i x$
となるプロフィールを考えると $wP''z$，$zP''x$，$yP''w$ より $yP'x$ が得られる。

[*16] x と y に関する社会的選好が厳密であることの証明においては x と z，y と w の少なくともいずれかが異なると仮定して問題はない。その上でともに一致する場合は無関係選択肢からの独立性によって直ちに補題の結論が得られる。

次にあるプロフィール p' において任意の 2 つの選択肢 z，w をとり個人 i が w より z を好んでいるとする。他の人々の z，w に関する選好は特定しない。また z，w とは異なる選択肢 u をとり，個人 1 から $i-1$ までの人々は u を厳密に最も好み，個人 $i+1$ 以降の人々は u を厳密に最も嫌っているものとし，個人 i は z，u，w の順に好むと仮定する。p' と p^{i-1} において (x, y) と (w, u) に関する人々の選好が同じであり，p' と p^i において (x, y) と (z, u) に関する人々の選好が同じであるから社会的に $uP'w$，$zP'u$ となり，推移性によって $zP'w$ が得られる。このとき個人 i 以外の人々の z，w に関する選好は特定されておらず，また z，w は任意であるから個人 i は独裁者であることがわかる。(z, w) が (x, y) と一致する場合にもこの議論は当てはまる。 ☺

3　寡頭制定理など (Mas-Colell and Sonnenschein(1972, *Review of Economic Studies*))

まずいくつか言葉を定義する[*17]。

準推移性 (quasi-transitivity)　「推移性」は無差別関係を含む選好（社会的選好については R で表される）の推移性を要求するものであるが，厳密な選好（P で表される）の推移性だけを求める条件を準推移性 (quasi-transitivity) と呼ぶ。P と I の推移性，I と P の推移性，I の推移性は求めない。

非循環性 (acyclicity)　xPy，yPz，zPw であって wPx となる場合には選好が循環していると言う。このとき xPw ではなくても xRw であることを求めるのが非循環性であり，準推移性よりさらに弱い条件である。非循環性は任意の数の選択肢の列（上の例では 4 つの選択肢の列）について成り立つことが求められる。

決定的 (decisive)　2 つの選択肢 x，y についてあるグループ G の人々が y より x を好み，他の人々が逆に x より y を好むときに社会的に xPy となるならば G は「y に対して x について決定的である」と言う。

最小決定的集合 (smallest decisive set)　いずれかの選択肢の組について決定的なグループが複数あるとき，その内で最も小さい（人数が少ない）グループを最小決定的集合と呼ぶ。パレート原理によって全員からなるグループは任意の選択肢の組について決定的であるので少なくとも 1 つは決定的なグループがあるから，必ず最小決定的集合が存在する（個人の数が有限なので)。

拒否権者 (vetoer)　任意の選択肢の組 (x, y) についてある個人 i が y より x を好むときに社会的に xRy となるならば個人 i は拒否権者であると言う[*18]。xPy となるとは求めていない。その場合は独裁者である。独裁者は多くても 1 人しかいないが，拒否権者は複数いるかもしれない。場合によっては全員が拒否権者になることもあり得る[*19]。

[*17] 本節は A. Mas-Colell and H. Sonnenschein, “General possibility theorems for group decisions”, *Review of Economic Studies*, vol. 39, pp. 185-192, 1972. にもとづく。

[*18] Mas-Colell and Sonnenschein(1972) では弱い独裁者 (weak dictator) と呼ばれている。

[*19] その場合 y より x を好む人と x より y を好む人がいれば社会的には無差別になる。

正の反応性 (positive responsiveness)　任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について，あるプロフィール p において社会的選好が xRy であるとする。1 人の個人 i の x，y に関する選好が「xI_iy から $xP_i'y$」または「yP_ix から $xI_i'y$ または $xP_i'y$ に」変った後のプロフィールを p' とすると $xP'y$ である。

この条件は，1 人の人の選好においてそれまでと比べて x が y よりいくらかでも上位になるように変化するならば，可能な限り社会的に x が y よりも上位に変化しなければならないということを意味する。

本節では社会的選好が準推移性や非循環性しか満たさない場合の問題を検討するが，個人の選好については推移性が満たされると仮定する。

3.1　寡頭制定理 (Oligarchy theorem)

寡頭制とは次のような意味である。

寡頭制 (oligarchy)　ある二項的社会選択ルールについて，あるグループ G があって，G がすべての選択肢の組について決定的であり，かつそのグループを構成する個人がすべて拒否権者であるとき，二項的社会選択ルールは寡頭制であると言う。

以下では次の定理を証明する。

定理 3.1 (寡頭制定理). 二項的社会選択ルールが「無関係選択肢からの独立性」「パレート原理」「定義域の非限定性」「非独裁性」と準推移性を満たすとき，それは寡頭制となる。

まず次の補題を示す。

補題 3.2. ある選択肢の組 (x, y) についてある個人 i が，y に対して x について決定的であるならば個人 i は独裁者である。

証明. これは鈴村によるアローの定理の証明で重要な役割を果たしていた補題 1.3（独裁者の補題）と同じ内容である。その証明において準推移性（P の推移性）しか用いられていないことを確認していただきたい。 ☺

補題 3.3. ある二項的社会選択ルールが「無関係選択肢からの独立性」「パレート原理」「定義域の非限定性」と準推移性を満たし，独裁者は存在しないとする。あるグループ G が y に対して x について決定的であり，かつそれが最小決定的集合ならば G は少なくとも 2 人の個人を含み，また G に含まれる人々はすべて拒否権者である。

証明. G が 1 人の個人しか含まないならば補題 3.2 によって独裁者となるから，最低 2 人の個人を含まなければならない。これで前半が示された。

次に

「G に含まれる個人 i について，選択肢の組(x, z)に関して『xP_iz ならば他の人々の選好に関わらず社会的選好は xRz』が任意のプロフィールにおいて成り立つ。」　(3.1)

を示す。z は x，y 以外のある選択肢を表す。これが成り立たないと仮定してみよう。すると次のようなプロフィール p において社会的選好は zPx（xRz ではないから）となることがある。

(1). 個人 i：xP_iz
(2). それ以外の人々：x，z に関する選好は特定しない。

ここで G から個人 i を除いた人々のグループを G' として次のようなプロフィール p' を考える。

(1). 個人 i：$xP'_iyP'_iz$
(2). G' の人々（j で表す）：xP'_jy，zP'_jy で x と z に関する選好は p と同じ。
(3). それ以外の人々（k で表す）：yP'_kx，yP'_kz で x と z に関する選好は p と同じ。

G は y に対して x について決定的であるから $xP'y$ であり，無関係選択肢からの独立性によって $zP'x$ である。したがって準推移性により $zP'y$ となる。そのとき G' の人々だけが y より z を好み他の人々は z より y を好んでいるから G' は y に対して z について決定的となる。しかしこれは G が最小決定的集合であるという仮定と矛盾する。以上で (3.1) が証明された。

その上で補題の後半を証明しよう。これは次のようにも表現される。

G に含まれる各個人 i について，任意の選択肢の組(u,v)に関して「uP_iv ならば
他の人々の選好に関わらず社会的選好は uRv」が任意のプロフィールにおいて成り立つ。 (3.2)

これを示すには次の 2 つの関係を示せばよい。

「xP_iz ならば他の人々の選好に関わらず社会的選好は xRz」が成り立てば「uP_iz ならば
他の人々の選好に関わらず社会的選好は uRz」が任意の u について成り立つ。 (3.3)

「xP_iz ならば他の人々の選好に関わらず社会的選好は xRz」が成り立てば「xP_iv ならば
他の人々の選好に関わらず社会的選好は xRv」が任意の v について成り立つ。 (3.4)

(3.1) から出発して (3.3)，(3.4) を組み合わせれば (3.2) が証明される。(3.3) が成り立たないと仮定してみよう。そのとき次のようなプロフィール p^1 において社会的選好が zP^1u となることがある。

(1). 個人 i：$uP_i^1xP_i^1z$
(2). それ以外（j で表す）：zP_j^1x，uP_j^1x で u と z に関する選好は特定されない。

このときパレート原理によって uP^1x であるから，zP^1u と合わせて準推移性によって zP^1x となる。一方 (3.1) によって xR^1z でなければならないので矛盾する。したがって uR^1z でなければならず無関係選択肢からの独立性によって「uP_iz ならば他の人々の選好に関わらず社会的選好は uRz」が成り立つ。(3.4) も同様にして証明される。以上でこの補題が証明された。 ☺

寡頭制定理の証明. 補題 3.3 によって最小決定的集合があればそれに属する人々はすべて拒否権者であることが示された。最小決定的集合は存在するので定理が成り立つ。 ☺

追加の定理を示す。

定理 3.4. 社会を構成する人々の数が 3 人以上であるとする。「無関係選択肢からの独立性」「パレート原理」「定義域の非限定性」と準推移性，正の反応性，非独裁性を満たす二項的社会選択ルールはない。

証明. 補題 3.3 によって独裁者がいなければ最低 2 人以上の拒否権者が存在する。その 2 人を個人 1，2 とする。任意の x，y について xP_1y，yP_2x であれば，他の人々の選好に関わらず社会的に xIy でなければならない（ともに拒否権者であるから)。しかし正の反応性を満たすならば他の誰かの選好が（それまでよりも x が y より上位になるように）変化したときに社会的選好も変化しなければならず矛盾が生じる[*20]。 ☺

「他の人々の選好に関わらず」という所がポイントである。したがって人数が 2 人であればこの定理の条件を満たすようなルールがある。単純な多数決法（選択肢を 2 つづつ比べて多数決にもとづいて社会的選好を決める）はまさにそのようなルールである。人数が 2 人なので 1 対 1 のときは社会的に無差別とする[*21]。

3.2 拒否権者定理 (vetoer theorem)

次に準推移性を非循環性に弱めた場合にどのような結論が得られるかを考えてみよう。ここでは次の定理を証明する。

定理 3.5 (拒否権者定理). 社会を構成する人々が 4 人以上であるとする。二項的社会選択ルールが「無関係選択肢からの独立性」「パレート原理」「定義域の非限定性」「非独裁性」と非循環性，正の反応性を満たすとき拒否権者が存在する。

正の反応性の必要性は次の例を見ればわかる。

例 3.1. N 人の人がいる社会において次のような社会選択ルールを考える。ある特定の選択肢の組を (u,v)，任意の選択肢の組を (x,y) として

(1). $(x,y)\neq(u,v)$ のときはすべての人が y より x を好むときのみ xPy（x より y を好むときのみ yPx)，それ以外は xIy

(2). $(x,y)=(u,v)$ については $N-1$ 人以上の人々が v より u を好むときのみ uPv（u より v を好むときのみ vPu)，それ以外は uIv

(u,v) については誰も拒否権を持たない。3 つの選択肢 x，y，z について xPy，yPz であれば $N-1$ 人以上の人々が xP_iy という選好を持ち，同じく $N-1$ 人以上の人々が yP_iz という選好を

[*20] 例えば個人 3 の選好が yP_3x から xP_3y あるいは xI_3y に変れば社会的選好も xPy にならなければならない。

[*21] この場合多数決は準推移性を満たすが推移性は満たさない。個人 1，2 の 2 人，3 つの選択肢 x，y，z を考え，プロフィール p において xP_1yP_1z，zP_2xP_2y であるとすると多数決による社会的選好は xIz，zIy であって xPy となる。準推移性は以下のようにして示される。社会的に xPy かつ yPz であるとすると yP_ix，zP_iy という選好を持つ人がおらず，少なくとも 1 人は xP_iy または yP_iz という選好を持つ。したがって個人の選好の推移性によって x と z について zP_ix という選好を持つ人はおらず，ともに xR_iz であって少なくとも 1 人は xP_iz という選好を持つ。したがって社会的選好は xPz となり準推移性が成り立つ。

持っている。したがって $N-2$ 人以上の人々がその両方の選好を持ち，個人の選好の推移性から xP_iz という選好を持つ。そのとき少なくとも社会的選好が zPx となることはないので非循環性が成り立つ。しかし例えば $N-3$ 人の選好が xP_iy で残りの人々の選好が yR_ix のときに（そのとき xIy である），1 人の人の選好が yP_ix から xI_iy あるいは xP_iy に変わっても $N-1$ 人以上が xP_iy とはならないので正の反応性は満たされない

つまり，非循環性のもとで拒否権者が存在することを言うためには正の反応性の条件を課す必要がある。

まず次の補題を示す。

補題 3.6. 「定義域の非限定性」「無関係選択肢からの独立性」「パレート原理」「非独裁性」と非循環性，正の反応性を満たす二項的社会選択ルールについて次の条件を満たす個人（i で表す）が存在する。

ある選択肢の組(x,y)に関して「xP_iy かつ他の人々（j で表す）の選好が yP_jx ならば社会的選好は xRy」が任意のプロフィールにおいて成り立つ。　(3.5)

証明. 補題が成り立たないと仮定しよう。すると任意の選択肢の組，すべての個人 i について

$$xP_iy \text{ かつ他の人々の選好が } yP_jx \text{ ならば社会的選好は } yPx \text{ である。} \tag{3.6}$$

G を上で述べた最小決定的集合とする。補題 3.2 より G は 1 人ではいけない。G が y に対して x について決定的であるとし，G に含まれる 1 人の人を i，i を除く G の人々の集合を G' として次のプロフィール p' を考える。

(1). 個人 i：$xP'_iyP'_iz$
(2). G' の人々（j で表す）：$zP'_jxP'_jy$
(3). それ以外（k で表す）：$yP'_kzP'_kx$

G は y に対して x について決定的であるから $xP'y$ であり (3.6) によって $zP'x$ である。したがって非循環性により $zR'y$ となる。G' から 1 人の人 j を除いた集合を G'' として次のプロフィール p'' を考える。

(1). 個人 i：xP''_iy
(2). 個人 j：yP''_jx
(3). G'' の人々（k で表す）：xP''_ky
(4). それ以外（l で表す）：yP''_lx

G は最小決定的集合であるから $xP''y$ であってはならず $yR''x$ である[*22]。さらに次のプロフィール p^1 を考える。

[*22] $xP''y$ ならば $G''\cup\{i\}$ が決定的となる。

(1). 個人 i：$xI_i^1yI_i^1z$
(2). 個人 j：$zP_j^1yP_j^1x$
(3). G'' の人々（k で表す）：$xP_k^1zP_k^1y$
(4). それ以外（l で表す）：$yP_l^1xP_l^1z$

p'' の結果と正の反応性によって yP^1x が得られる。また p' の結果と正の反応性によって zP^1y となる。したがって非循環性によって zR^1x である。さらに次のプロフィール p^2 を考える。

(1). 個人 i：zP_i^2x
(2). 個人 j：zP_j^2x
(3). G'' の人々（k で表す）：xP_k^2z
(4). それ以外（l で表す）：xP_l^2z

p^1 の結果と正の反応性によって zP^2x が得られる。このことは G'' が空集合であること，G が個人 i と j の 2 人からなっていることを意味する。そうでなければ $\{i,j\}$ が x に対して z について決定的となり G が最小決定的集合であることに反する。さらに次のプロフィール p^3 を考える。

(1). 個人 i：$xP_i^3yP_i^3z$
(2). 個人 j：$zP_j^3xP_j^3y$
(3). それ以外（k で表す）：$yP_k^3zP_k^3x$

$G=\{i,j\}$ が y に対して x について決定的であるから xP^3y であり，(3.6) により yP^3z である。したがって非循環性によって xR^3z となる。しかし z より x を好むのは i だけであるからこれは (3.6) に反する。以上によって補題が証明された。 ☺

次に

補題 3.7. 社会を構成する人々が 4 人以上であるとする。二項的社会選択ルールが「無関係選択肢からの独立性」「パレート原理」「定義域の非限定性」「非独裁性」と非循環性，正の反応性を満たすとき「他の人々が逆の選好を持つ場合に限った拒否権者」が存在する。

「他の人々が逆の選好を持つ場合に限った拒否権者」とは，任意の (x,y) について個人 i が xP_iy 他の人々が yP_ix であるときに社会的選好が xRy となるような個人を指す。言い換えれば (3.5) が任意の選択肢の組について成り立つ個人である。

証明. 上記の拒否権者を個人 i とする。以下の 2 つを示せばよい。

> 「xP_iy かつ他の人々（j で表す）の選好が yP_kx ならば社会的選好は xRy」が成り立つとき任意の選択肢 u について「uP_iy かつ他の人々の選好が yP_ku ならば社会的選好は uRy」が成り立つ。 (3.7)

および

> 「xP_iy かつ他の人々（j で表す）の選好が yP_kx ならば社会的選好は xRy」が成り立つとき任意の選択肢 v について「xP_iv かつ他の人々の選好が vP_kx ならば社会的選好は xRv」が成り立つ。　(3.8)

(3.5) から出発して (3.7)，(3.8) を組み合わせれば「他の人々が逆の選好を持つ場合に限った拒否権者」の存在が証明される。x，y に関する前段の内容を仮定して (3.8) を証明する。(3.7) の証明も同様である。$i=1$ とし，他に個人 2，3，4 をとって次のプロフィール p を考える。

(1). 個人 1：xP_1yP_1v
(2). 個人 2：xI_2yP_2v
(3). 個人 3：yP_3vP_3x
(4). 個人 4：yP_4vP_4x
(5). それ以外（k で表す）：yP_kvP_kx

仮定と正の反応性により xPy であり（個人 2 の選好が x に有利な方向に変化している)，パレート原理によって yPv となるから非循環性により xRv が得られる。その上で次のプロフィール p' を考える。

(1). 個人 1：$yP'_1xP'_1v$
(2). 個人 2：$yP'_2xP'_2v$
(3). 個人 3：$vP'_3yP'_3x$
(4). 個人 4：$yP'_4xI'_4v$
(5). それ以外（k で表す）：$vP'_kyP'_kx$

p の結果と正の反応性により $xP'v$ となり（個人 4 の選好が x に有利な方向に変化している)，パレート原理によって $yP'x$ であるから非循環性により $yR'v$ が得られる。その上で次のプロフィール p'' を考える。

(1). 個人 1：$xP''_1yP''_1v$
(2). 個人 2：$yP''_2vP''_2x$
(3). 個人 3：$xI''_3yI''_3v$
(4). 個人 4：$yP''_4vP''_4x$
(5). それ以外（k で表す）：$vP''_kyP''_kx$

仮定と正の反応性により $xP''y$ であり（個人 3 の選好が x に有利な方向に変化している)，また p' の結果と正の反応性により $yP''v$ となるから（個人 3 の選好が y に有利な方向に変化している）非循環性により $xR''v$ が得られる。その上で次のプロフィール p^1 を考える。

(1). 個人 1：$yP^1_1xP^1_1v$
(2). 個人 2：$vP^1_2yP^1_2x$
(3). 個人 3：$yP^1_3xP^1_3v$

(4). 個人 4：$vP_4^1yP_4^1x$
(5). それ以外（k で表す）：$vP_k^1yP_k^1x$

p'' の結果と正の反応性により xP^1v（個人 3 の選好が x に有利な方向に変化している），パレート原理によって yP^1x であるから非循環性により yR^1v が得られる。その上で次のプロフィール p^2 を考える。

(1). 個人 1：$xP_1^2yP_1^2v$
(2). 個人 2：$vP_2^2xI_2^2y$
(3). 個人 3：$yP_3^2vP_3^2x$
(4). 個人 4：$yI_4^2vP_4^2x$
(5). それ以外（k で表す）：$vP_k^2yP_k^2x$

仮定と正の反応性により xP^2y であり（個人 2 の選好が x に有利な方向に変化している），p^1 の結果と正の反応性により yP^2v であるから（個人 4 の選好が y に有利な方向に変化している）非循環性により xR^1v が得られる。このとき個人 1 だけが v より x を好み，他の人々は x より v を好んでいるので (3.8) が証明された。 ☺

拒否権者定理の証明.「他の人々が逆の選好を持つ場合に限った拒否権者」を個人 i として，それが真の拒否権者であることを示せばよい。もしそうでなければある選択肢の組 (x,y) について次のようなプロフィールで yPx となる場合がある。

(1). 個人 i：xP_iy
(2). それ以外（j で表す）：x，y の選好は特定されない。

yPx は yRx を意味する。yP_ix ではない人々の選好を 1 人 1 人 yP_ix に変えて行くことを考えると，正の反応性によって最終的に「個人 i が xP_iy で他のすべての人々が yP_ix のときに社会的選好が yPx」となる。しかしこれは個人 i が「他の人々が逆の選好を持つ場合に限った拒否権者」であることに反する。したがって個人 i は真の拒否権者でなければならない。 ☺

人数が 4 人以上であるという条件は必須のものである。次の例を考えてみよう。

例 3.2. 1，2，3 の 3 人からなる社会において x，y，z の 3 つの選択肢がある。次のような社会選択ルールを考える。

(1). 誰か 1 人が xP_iz で他の 1 人が xR_iz（2 人以上が xR_iz で少なくとも 1 人が xP_iz）のときは xPz，3 人ともが zR_ix で少なくとも 1 人が zP_ix のときは zPx，それ以外は xIz。
(2). 誰か 1 人が yP_iz で他の 1 人が yR_iz（2 人以上が yR_iz で少なくとも 1 人が yP_iz）のときは yPz，3 人ともが zR_iy で少なくとも 1 人が zP_iy のときは zPy，それ以外は yIz。
(3). x と y については多数決で決める。すなわち xP_iy である人が yP_ix である人より多ければ xPy，少なければ yPx，同数の場合は xIy。

「無関係選択肢からの独立性」「パレート原理」は明らかに成り立つ。また少なくとも x と y につ

いては拒否権者はいない。x と z が無差別になるのは

(1). 3 人が xI_iz。
(2). 1 人が xP_iz，2 人が zP_ix。

の場合だけである。いずれの場合も x（または z）に有利となるように個人の選好が変れば社会的選好もそれに応じて変る。またもともと xPz（または zPx）となっている状態から x（または z）に有利となるように個人の選好が変っても社会的選好は変らない。y と z についても同様。また x と y の社会的選好は多数決で決める。したがって p. 6.1 で見るように正の反応性が満たされている。

問題は非循環性が成り立つかどうかである。yPx かつ xPz と仮定してみよう。このとき少なくとも 1 人の選好は yP_ix であり，同じく少なくとも 1 人の選好は xP_iz である。また少なくとも 2 人の選好は yR_ix であり，やはり少なくとも 2 人の選好は xR_iz である。したがって以下の場合が考えられる。

(1). yP_ix である人が xR_iz。推移性により yP_iz。この場合 zPy とはならない。
(2). xP_iz である人が yR_ix。推移性により yP_iz。この場合も zPy とはならない。
(3). yP_ix である人は zP_ix，xP_iz である人は xP_iy。そのときもう 1 人も yP_ix でなければ多数決によって yPx とはならない。またその人は xR_iz であるから推移性によって yP_iz となるので zPy とはならない。

逆を考えてみよう。xPy かつ zPx と仮定する。このとき少なくとも 1 人の選好は xP_iy であり，同じく少なくとも 1 人の選好は zP_ix である。また少なくとも 2 人の選好は xR_iy であり，3 人すべてが zR_ix である。したがって以下の場合が考えられる。

(1). zP_ix である人が xI_iy。推移性により zP_iy。このとき xP_iy である人は zR_ix であるから推移性により zP_iy となるので yPz とはならない。
(2). zP_ix である人が xP_iy。推移性により zP_iy。yPz となるためには後の 2 人がともに yR_iz で少なくとも 1 人が yP_iz でなければならない。2 人とも zR_ix であるから推移性により後者の人は yP_ix でなければならない。一方推移性により前者の人も yR_ix でなければならないが，そのとき多数決によって xPy とはならない。したがって yPz にはならない。
(3). zP_ix である人が yP_ix。このとき (1) と同様に xP_iy である人は zP_iy。yPz となるためにはもう 1 人が yR_iz である必要がある。その人は zR_ix かつ xR_iy なので xI_iy でなければならないが，そうすると多数決によって xPy とはならない。したがって yPz にはならない。

以上によってこの例の社会選択ルールは非循環性を満たしている。

4　ウィルソンの定理の証明 (Malawski and Zhou(1994, *Social Choice and Welfare*))

アローの定理はパレート原理を仮定して独裁者の存在を証明する内容であったが，これに対して「非賦課性 (non-imposition)」と呼ばれるより弱い条件のもとで似通った主張をするのがウィルソンの定理である。本節ではそのウィルソンの定理について Wilson 自身の原論文ではなく Malawski and Zhou(1994) によるより簡略化された証明を紹介する[*23]。

4.1　ウィルソンの定理

まずいくつかの言葉を定義する。

非賦課性 (Non-imposition)　すべての 2 つの選択肢の組 (x, y) について，社会的選好が xRy となるようなプロフィールが存在する。これはある特定の選択肢の組 (z, w) において常に w が z より社会的に好まれるというようなことがないという条件である。

無意味 (null)　ある二項的社会選択ルールによって導かれる社会的選好が，どのようなプロフィールにおいてもあらゆる選択肢の組について無差別であるとき，その二項的社会選択ルールは無意味 (null) であると言う。無意味でないときは non-null と言われる。

逆パレート原理 (anti-Pareto principle)　任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) についてすべての人々が y より x を好むときに社会的には逆に x より y が好まれる。

逆独裁者 (Inverse dictator)　任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) についてその個人が y より x を好むときに常に社会的に x より y が好まれるような個人を逆独裁者と呼ぶ。他の人々の選好に関わらずいつも自分の選好とは逆の選好が社会的選好になるのである意味，つまり逆の意味で独裁者である。

ウィルソンの定理は次のような内容である。

定理 4.1 (ウィルソンの定理). アローの一般可能性定理において「パレート原理」を「非賦課性」に置き換えたとき，それらの条件を満たす二項的社会選択ルールが無意味でなければ独裁者か逆独裁者のいずれかが存在する。

まず次の補題を示す。

補題 4.2. 二項的社会選択ルールが「定義域の非限定性」「無関係選択肢からの独立性」「非賦課性」「完備性」「推移性」を満たすならば無意味であるか，パレート原理を満たすか，または逆パレート原理を満たすかのいずれかである。

[*23] 本節は M. Malawski and L. Zhou, “A note on social choice theory without the Pareto principle”, *Social Choice and Welfare*, vol. 11, pp. 103-107, 2003. にもとづく。ウィルソンの定理の原論文は R. Wilson, “Social choice theory without the Pareto principle”, *Journal of Economic Theory*, vol. 5, pp. 478-486, 1972. である。

証明. ある 2 つの選択肢の組 (x, y) をとり以下の 3 つのケースに分ける。

(1). あるプロフィール p において，すべての人々が y より x を好むときに社会的選好が xPy となる場合：
x，y 以外のある選択肢を z とする。非賦課性により社会的選好が $yR'z$ となるようなプロフィール p' がある。別のプロフィール p'' をとり，y と z に関する人々の選好は p' と同じであり，すべての人々が y より x を，z より x を好むものとする。そのようなプロフィールは矛盾なく作ることができる。このケースの仮定と無関係選択肢からの独立性により p'' において $xP''y$ かつ $yR''z$ であるから推移性により $xP''z$ を得る。したがってプロフィール p'' において「すべての人々が z より x を好む」ときに $xP''z$ となる。
非賦課性によって社会的選好が zR^1x となるようなプロフィール p^1 がある。別のプロフィール p^2 をとり，x と z に関する人々の選好は p^1 と同じであって，すべての人々が y より x を，y より z を好むものとする。仮定と無関係選択肢からの独立性により p^2 において xP^2y かつ zR^2x であるから推移性により zP^2y を得る。したがってプロフィール p^2 において「すべての人々が y より z を好む」ときに社会的選好は $zP''y$ となる。
前半の議論で x，y，z をそれぞれ z，y，u（u は z，y 以外の選択肢）に置き換えると（後半の結論を用いて）「すべての人々が u より z を好むときに社会的にも u より z が好まれる」が得られる。これを用いて後半の議論で x，y，z をそれぞれ z，u，v（v は z，u 以外の選択肢）に置き換えると「すべての人々が u より v を好むときに社会的にも u より v が好まれる」が得られる。したがって一般的にパレート原理が成り立つ[*24]。

(2). あるプロフィール p において，すべての人々が y より x を好むときに社会的選好が yPx となる場合（この先の証明は Malawski and Zhou(1994) では省略されている）：
x，y 以外のある選択肢を z とする。非賦課性により社会的選好が $zR'y$ となるようなプロフィール p' がある。別のプロフィール p'' をとり，y と z に関する人々の選好は p' と同じであって，すべての人々が y より x を，z より x を好むものとする。このケースの仮定と無関係選択肢からの独立性により p'' において $yP''x$ かつ $zR''y$ であるから推移性により $zP''x$ を得る。したがってプロフィール p'' において「すべての人々が z より x を好む」ときに $zP''x$ となる。
非賦課性によって社会的選好が xR^1z となるようなプロフィール p^1 がある。別のプロフィール p^2 をとり，x と z に関する人々の選好は p^1 と同じであり，すべての人々が y より x を，y より z を好むものとする。仮定と無関係選択肢からの独立性により p^2 において yP^2x かつ xR^2z であるから推移性により yP^2z を得る。したがってプロフィール p^2 において「すべての人々が y より z を好む」ときに社会的選好は $yP''z$ となる。
前半の議論で x，y，z をそれぞれ z，y，u（u は z，y 以外の選択肢）に置き換えると（後半の結論を用いる）「すべての人々が u より z を好むときに社会的には z より u が好まれる」が得られる。これを用いて後半の議論で x，y，z をそれぞれ z，u，v（v は z，u 以外の選択肢）に置き換えると「すべての人々が u より v を好むときに社会的には v より u が好ま

[*24] u は y とは異なるものと仮定されているが $u = y$ のケースは $zP''y$ となる場合によってカバーされている。

れる」が得られる。したがって一般的に逆パレート原理が成り立つ。

(3). 任意の 2 つの選択肢の組についていかなるプロフィールにおいても，すべての人々が y より x を好むときに社会的選好が xIy となる場合：

このケースは「すべての人々が y より x を好むときに社会的選好が xPy または yPx になることがない」という場合である。これだけで二項的社会選択ルールはほとんど無意味であるがすべての人々の選好が同じでない場合も考えなければならない。まず二項的社会選択ルールが無意味でないとすればある選択肢の組 (x, y) について社会的選好が xPy となるようなプロフィール p がある。別のプロフィール p' と x，y 以外の選択肢 z をとり，x と y に関する人々の選好は p と同じであって，すべての人々が z より x を，z より y を好むものとする。このとき無関係選択肢からの独立性により $xP'y$ でなければならないが，一方もし社会的選好が $xI'z$ かつ $yI'z$ であるとすると推移性によって $xI'y$ となり矛盾する。したがって x と z，あるいは y と z のいずれかの組は社会的に無差別ではなく，二項的社会選択ルールが無意味でなければこのケースのような場合はないことが示された。

☺

パレート原理を満たすならばアローの定理によって独裁者の存在が導かれる。逆パレート原理を満たす場合はアローの定理の証明と同様の手順によって逆独裁者の存在が導かれる。Geanakoplos の第 1 の証明に沿ってそれを示してみよう（以下の証明も Malawski and Zhou(1994) では省略されている)。

まず言葉を定義する（筆者の造語である)。

anti-pivotal あるプロフィール p において 2 つの選択肢 x，y について，ある個人 i 以外の人々の選好が変らず，その個人 i の選好において x が y より厳密に上位に位置するとき，および逆に y が x より厳密に上位に位置するときに，社会的選好においてその逆になるならば個人 i は p において x，y について anti-pivotal である。

extremely anti-pivotal あるプロフィール p において，ある選択肢 x について個人 i が x とその他のすべての選択肢との組について anti-pivotal であるならば，個人 i は p において x について extremely anti-pivotal である。

このとき個人 i のみの選好の変化によって x を社会的選好の最下位（最上位ではなく）に持って行くことができる。

inverse dictator あらゆるプロフィールにおいて，ある個人 i がすべての選択肢の組について anti-pivotal であるとき逆独裁者である。

次の補題を逆パレート原理を用いて示す（少ししか違わない)。

補題 4.3 (Extremal Lemma（再）). ある選択肢 x について，x を最も好むような選好を持っている人々と，逆に x を最も好まない選好を持っている人々に分かれているとき，社会的選好において x は厳密に最上位に位置するかかまたは厳密に最下位に位置する。

証明. y，z を x 以外の選択肢として，補題の仮定を満たすようなあるプロフィールにおいて社会

的選好が zRx，xRy となっていると仮定する。各個人の選好において x は最上位または最下位に位置しているので x と y の関係，x と z の関係を変えずに z を y よりも上に持って行くことができる。そのとき無関係選択肢からの独立性によって社会的選好が zRx，xRy であることに変りはない。推移性によって社会的選好は zRy となる。一方逆パレート原理によって yPz でなければならず，矛盾が生じるから社会的選好において x は厳密に最上位に位置するかかまたは厳密に最下位に位置していなければならない。 ☺

さらに次の補題を示す。

補題 4.4. あるプロフィールにおいてある選択肢 x について extremely anti-pivotal な個人が存在する。

証明. x がすべての人々の選好において厳密に最下位に位置するようなプロフィールを考える。他の選択肢に関する選好は特定しない。そのとき逆パレート原理によって社会的選好においても x は厳密に最上位（最下位ではなく）に位置する。その状態から 1 人 1 人の選好が適当な順序で，他の選択肢に関する選好は変らず x が厳密に最上位に位置するようなものに変って行くものとする。Extremal Lemma によって社会的選好において x は最上位に位置するか最下位に位置するかのいずれかであるが，全員の選好が x を最も好むものになれば逆パレート原理によって社会的選好は逆になるので，ある人の選好が変化したときに初めて x が社会的選好の最下位に位置するようになる個人が存在する。その個人を i とする。i の手前までの人の選好が変化したときのプロフィールを p^1，i の選好が変化したときのプロフィールを p^2 とする。このとき個人 i の選好において x は最下位から最上位に移っているから他のすべての選択肢との関係を逆転させることによって社会的選好において逆の変化を生じさせているので個人 i はプロフィール p^1 において x について extremely anti-pivotal でる。 ☺

補題 4.5. 前の補題でその存在を証明した extremely anti-pivotal な個人 i は x を含まないすべての選択肢の組について逆に独裁的である。すなわち，あらゆるプロフィールにおいて x 以外の任意の選択肢 y，z について yP_iz ならば他の人々の選好に関わらず社会的選好は逆に zPy となる。

証明. x 以外のある選択肢 y を任意にとり，上記のプロフィール p^2 をもとに次のようなプロフィール p^3 を作る。

(1). 個人 i ：x，y 以外の任意の選択肢 z について $yP_i^3xP_i^3z$

(2). それ以外（j で表す）：x の位置は p^1 および p^2 における選好と同じで他の選択肢に関する選好は任意

無関係選択肢からの独立性によって，p^3 において x と y に関する社会的選好は xP^3y（p^1 においても p^3 においても x と y に関する人々の選好は同じだから）であり，同様に x と z に関する社会的選好は zP^3x（p^2 においても p^3 においても x と z に関する人々の選好は同じだから）である。したがって推移性により zP^3y を得る。このとき個人 i は z より y を好み，他の人々の y と z に関する選好は特定されていないので無関係選択肢からの独立性によって個人 i が z より y を好む限り社会的には y より z が好まれる。よって個人 i は y と z について逆独裁者である。 ☺

逆独裁者の存在の証明. 最後に上の個人 i が x を含む選択肢の組についても逆に独裁的であることを示そう。x 以外のある選択肢 y をとり人々が y について Extremal Lemma における x と同様の選好を持つものとする。すると補題 4.5 により y 以外の選択肢の組について逆に独裁的な個人が存在する。その個人を $i(y)$ で表す。$i(y)$ は x と z（x，y 以外のある選択肢）の組についても逆に独裁的である。一方補題 4.4 における個人 i はプロフィール p^1 と p^2 の間で自らの選好の変化によって x と z に関する社会的選好に影響を与えている（p^1 から p^2 への変化によって x は社会的選好の再上位から最下位に移る)。個人 i 以外の人物が x と z に関する逆独裁者であればそのようなことは起こらない。したがって個人 $i(y)$ は i 自身である。よって個人 i がすべての選択肢の組について逆独裁者であることが示された。 ☺

4.2 準推移性の場合

Malawski and Zhou(1994) はもう 1 つの結果を証明している。社会的選好が推移性ではなく準推移性（厳密な選好に関する推移性のみを満たせばよいという条件）だけを満たす二項的社会選択ルールを考える。もちろん個人の選好は推移性を満たしていなければならない。まずいくつかの言葉を定義する。

厳密な非賦課性 (strict non-imposition)　任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について，社会的選好が xPy となるようなプロフィールが存在する。非賦課性では xRy（xPy または xIy）となるようなプロフィールの存在を求めただけなのでこの条件の方が強い。

厳密に無意味ではない (strictly non-null)　ある 2 つの選択肢の組 (x, y) について，あるプロフィールにおいてすべての人々が xP_iy または yP_ix という選好を持つとき社会的選好が xPy（または yPx）となる。

通常の non-null はあるプロフィールにおいて ある 2 つの選択肢が社会的に無差別ではないことを求めている。そのときその 2 つの選択肢について無差別な人がいてもかまわない。一方この条件は，すべての人々の選好が厳密であるときに無差別にならないことを求めているので少し強い条件になっている。

S-パレート原理 (S-Pareto principle)　社会を構成する人々の集合 N の内の一部の人々からなるグループを S，残りの人々のグループを $N-S$ とする。任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について S に属する人々すべてが y より x を好み，$N-S$ に属する人々すべてが x より y を好むときに社会的選好が xPy となるならば S-パレート原理が成り立つと言う。

$S=N$ のときは S-パレート原理は通常のパレート原理を意味し，$S=\emptyset$（空集合）すなわち $N-S=N$ のときは S-パレート原理は逆パレート原理を意味する。

以上の準備のもとに次の結果を示す（Malawski and Zhou(1994) では詳しい証明は省略されている)。

補題 4.6. パレート原理と推移性を除く二項的社会選択ルールが満たすべき条件と準推移性，厳密な非賦課性を満たし厳密に無意味ではない二項的社会選択ルールは S-パレート原理を満たす。

証明. 二項的社会選択ルールは厳密に無意味ではないので「ある 2 つの選択肢の組 (x, y) について，あるプロフィールにおいてすべての人々が xP_iy または yP_ix という選好を持つとき社会的選好が xPy となる」場合がある。このとき選好 xP_iy を持つ人々のグループを S とする。

x，y 以外のある選択肢を z とする。厳密な非賦課性により社会的選好が $yP'z$ となるようなプロフィール p' がある。別のプロフィール p'' をとり，y と z に関する人々の選好は p' と同じであり，S の人々が y より x を，z より x を好み，$N-S$ の人々は x より y を，x より z を好むものとする。このケースの仮定と無関係選択肢からの独立性により p'' において $xP''y$ かつ $yP''z$ であるから準推移性により $xP''z$ を得る。したがってプロフィール p'' において「S の人々が z より x を好み，$N-S$ の人々が x より z を好む」ときに $xP''z$ となる。

厳密な非賦課性によって社会的選好が zP^1x となるようなプロフィール p^1 がある。別のプロフィール p^2 をとり，x と z に関する人々の選好は p^1 と同じであって，S の人々が y より x を，y より z を好み，$N-S$ の人々は x より y を，z より y を好むものとする。仮定と無関係選択肢からの独立性により p^2 において xP^2y かつ zP^2x であるから準推移性により zP^2y を得る。したがってプロフィール p^2 において「S の人々が y より z を好み，$N-S$ の人々が z より y を好む」ときに社会的選好は $zP''y$ となる。

前半の議論で x，y，z をそれぞれ z，y，u（u は z，y 以外の選択肢）に置き換えると（後半の結論を用いて）「S の人々が u より z を好み，$N-S$ の人々が z より u を好むとき社会的に u より z が好まれる」が得られる。これを用いて後半の議論で x，y，z をそれぞれ z，u，v（v は z，u 以外の選択肢）に置き換えると「S の人々が u より v を好み，$N-S$ の人々が v より u を好むとき社会的に u より v が好まれる」が得られる。したがって一般的に S-パレート原理が成り立つ。

最初の仮定で yPx とおけば $N-S$ が S にとって代ることになる。 ☺

5　リベラルパラドックス (Sen(1970) および Kelsey(1985))

社会的選好の対象となる選択肢の中には特定の個人に関わるものが含まれているかもしれない。そのような選択肢に関する判断はその個人に任されるべきだという考え方もできるだろう。例えば自分の家の壁を赤く塗るか白く塗るかは持ち主の勝手であってそれを町内会の多数決で決められてはたまらない。このような事柄は個人の権利の問題ということになる。一方ある選択肢について社会のすべての人々が共通の選好を持てばそれが社会の選好や選択関数に反映されるべきだという「パレート原理」も説得力のある理念である。パレート原理は全員の選好が一致した場合の条件であるから，町内会の多数が自分の家の壁が赤いことを好むとしても本人がそうしたければ白くすることがパレート原理に反するわけではない。しかし社会的選好が首尾一貫したものであるという条件，具体的には非循環性を満たすという条件を課しても個人の権利とパレート原理は両立するのだろうか。これに対して極めて単純な枠組みで否定的な結論を導き出すのが Amartya Sen による「リベラル・パラドックス (liberal paradox)」と呼ばれる定理である。また Kelsey(1985) に従ってパレート原理を非賦課性（ウィルソンの定理における同じ条件とは多少異なる）に置き換えるとど

のようなことが言えるかも検討する[*25]。

5.1　パレート原理と個人の権利の両立性

初めに（論文の順序とは逆であるが）センによって取り上げられた 1 つの例を見てみよう。

■チャタレイ夫人の恋人　『チャタレイ夫人の恋人』という本が 1 冊だけあり，それを A 氏が読む，B 氏が読む，誰も読まない，という 3 つの選択肢があるものとする。それぞれを x，y，z と名づける。潔癖な A 氏はその本を「誰も読まない」ことを最も望み，次には彼自身が読むことを望み，「影響を受けやすい」B 氏が読むことは最悪であると考えているとする。すなわち A 氏は z，x，y の順で選好する。一方，B 氏は 2 人とも読まないよりはどちらかが読むことを望むが，彼自身が読むよりも堅物の A 氏が読むことを望んでいるとする。つまり B 氏は x，y，z の順で選好する。さて A 氏がこの本を読むか読まないかは A 氏の問題であるから，A 氏が自ら読むことを望まないのであれば社会としても A 氏が読むことよりも誰も読まないことを選好すべきであると言える。同様に B 氏が読むか読まないかは B 氏の問題であるから，B 氏が自ら読むことを望むのであれば社会としても誰も読まないことよりは B 氏が読むことを選好すべきである。つまり社会的には z が x よりも，また y が z よりも選好されるべきであるから，社会的な選好が非循環性を満たすならば x が y より選好されてはならない（推移性あるいは準推移性を満たすならば社会的選好は y，z，x の順でなければならない)。しかし A 氏，B 氏ともに，y よりも x を選好しているからパレート原理によれば x が y よりも選好されなければならず矛盾が生じる。

ところで，非循環性は社会的選好にもとづいて複数の選択肢の集合の中から最良のものを選び出すことができるための必要十分条件であることが知られている。ある選択肢が「最良」であるとは。社会がその選択肢よりも厳密に好むような別の選択肢が存在しないことであり，それが他のどの選択肢よりも厳密に好まれている（その場合はそれが唯一最良となる）ことまでは求めない。

補題 5.1. 社会的な選好 R が完備性，反射性，非循環性を満たせば複数の選択肢の中から最良のものを選び出すことができる。逆に，複数の選択肢の中から最良のものを選び出すことができるならば完備性，反射性を満たす社会的な選好は非循環性を満たす。すなわち，非循環性は完備性，反射性を満たす二項的社会選択ルールが最良のものを選び出すことができるための必要十分条件である。

証明. 選択肢を $x_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ で表す。後半から証明する。R が非循環的でないと仮定してみよう。そのとき（選択肢に適当に番号をつけて）$x_1 P x_2 P x_3 P \cdots P x_k$ であって $x_k P x_1$ となるような選択肢の組がある（$3 \leq k \leq m$)。すると，どの選択肢も「他のすべての選択肢より選好されるかまたは無差別」とはなっていないのでこの集合の中に最良のものは存在しない。したがって非循環性が成り立たなければ最良のものを選び出すことはできない。

[*25] 本節の内容は Amartya Sen, “The impossibility of a Paretian liberal”, *Journal of Political Economy*, vol. 78, pp 152-157, 1970. および D. Kelsey, “The liberal paradox: a generalization”, *Social Choice and Welfare*, vol. 1, pp. 245-250，1985. にもとづく。Sen の議論については A. Sen, *Collective Choice and Social Welfare*(1970, Holden-Day)（邦訳『集合的選択と社会的厚生』（勁草書房））の第 6，6* 章でも詳しく説明されている。

次に前半を示す。すべての選択肢について社会的選好が無差別となるならばすべてが最良である。したがって少なくとも 1 つの選択肢の組について厳密な選好 (P) が成り立つと仮定し，その関係を $x_2 P x_1$ とする。x_2 が全体の中で最良とならないのは別の選択肢 x_3 があって $x_3 P x_2$ となる場合だけである（そのような選択肢が存在しなければ x_2 が全体の中で最良である）。そのような x_3 があると仮定すると，もし $x_1 P x_3$ であるならば非循環性によって $x_1 R x_2$ でなければならない（$x_1 P x_3$，$x_3 P x_2$ であるから非循環性によって $x_2 P x_1$ となってはならない）。しかしこれは $x_2 P x_1$ という仮定と矛盾する。よって $x_1 P x_3$ ではなく $x_3 R x_1$ でなければならず x_3 は (x_1，x_2，x_3) の 3 つの選択肢の中で最良のものとなる。次に，x_3 が (x_1，x_2，x_3) の中で最良である（x_1 も x_2 も最良ではない）として x_4 を加える。$x_3 R x_4$ ならば x_3 が 4 つの中で最良である。$x_4 P x_3$ のとき，仮定によって $x_3 P x_2$ かつ $x_2 P x_1$ であるから非循環性によって $x_2 P x_4$ や $x_1 P x_4$ とはならない。したがって $x_4 R x_2$，$x_4 R x_1$ であるから x_4 は 4 つの中で最良である。このようにして選択肢を 1 つづつ加えていくことによって全体を検討すれば少なくとも 1 つ最良のものが存在することがわかる。 ☺

個人の権利を次のような条件で表す。

自由主義 (liberalism)　各個人 i にとって少なくとも 1 つの選択肢の組 (x, y) があって，社会的選好においてどちらの方向にも個人 i が決定的である。すなわち $xP_i y$ ならば社会的にも xPy，また $yP_i x$ ならば yPx である。

この条件はすべての人に権利を与えるものであるがこれを特定の 2 人だけに弱めることができる。すなわち

最小自由主義 (minimal liberalism)　少なくとも 2 人の個人 1 と 2，および異なる選択肢の組 (x, y)，(z, w) があって，1 と 2 がそれぞれの組についてどちらの方向にせよ決定的である。すなわち $xP_1 y$ ならば社会的にも xPy，$yP_2 x$ ならば yPx，$zP_2 w$ ならば zPw，$wP_2 z$ ならば wPz。

たった 2 人の権利を認めるだけであるがこれがパレート原理と両立しないことを示すことができる。

以上の準備のもとに次の定理が証明される。

定理 5.2. 「定義域の非限定性」「パレート原理」および最小自由主義，非循環性を満たす二項的社会選択ルールは存在しない。

証明. 最小自由主義の定義において (x, y) と (z, w) が同一の組であれば，2 人の人が同じ選択肢の組について決定的であることはありえないのでこの条件は成り立たない。まず $x = z$ のように一方が同じ選択肢であると仮定し，次のようなプロフィール p を考える。

(1). 個人 1：$xP_1 yP_1 w$
(2). 個人 2：$wP_2 x$，$yP_2 w$
(3). 他の人々（i で表す）：$yP_i w$

最小自由主義の条件によって社会的選好は xPy，wPx でなければならない。一方パレート原理により yPw でなければならないが，これは非循環性に反する。

次に 4 つの選択肢がすべて異なるものとし，次のようなプロフィールを p とする。

(1). 個人 1：$wP_1xP_1yP_1z$
(2). 個人 2：$yP_2zP_2wP_2x$,
(3). 他の人々：wP_ix，yP_iz

最小自由主義の条件によって社会的選好は xPy，zPw でなければならない。一方パレート原理により wPx，yPz でなければならないが，これは非循環性に反する。 ☺

以上の証明では個人 1，2 ともに両方向に決定的である必要はなく片方だけでよい。すなわち

xP_1y ならば社会的にも xPy，wP_2z ならば wPz。

という条件だけでよいように思われる。$x = w$（$y \neq z$）の場合を考えてみよう。個人 1 が y に対して x について決定的であり，個人 2 は z に対して x について決定的であるとする。個人 1 が xP_1y，2 が xP_2z という選好を持つとき社会的選好は xPy かつ xPz でなければならないが，これらとパレート原理，非循環性が矛盾する例を作ることはできない*26。したがって上記の条件の場合に矛盾を導くには $x \neq w$ であることが必要となる。同様に $y \neq z$ でなければならない。まとめると次の定理を得る。

定理 5.3. 「定義域の非限定性」「パレート原理」，非循環性およびある 2 人の個人 1，2，ある選択肢 x，y，z，w（$x \neq w$，$y \neq z$）について

xP_1y ならば社会的にも xPy，wP_2z ならば wPz。

という条件を満たす二項的社会選択ルールは存在しない。

5.2 非賦課性と個人の権利の両立性

定理 5.2 では社会的選好に非循環性を要求し「定義域の非限定性」を仮定すればパレート原理と個人の権利が両立しないことを示したが，実はもっと強い定理，すなわち「厳密な非賦課性」（Malawski and Zhou(1994) によるウィルソンの定理の変形版において取り扱った同名の条件と似ているが多少異なる）と個人の権利が両立しないことを示すことができる。ただしここでは「無関係選択肢からの独立性」の精神を取り入れた多少強い意味での「厳密な非賦課性」を仮定する。しかし「無関係選択肢からの独立性」そのものは仮定しないので Malawski and Zhou(1994) の議論と比べて実質的に強い仮定にはなっていない。

厳密な非賦課性 (strict non-imposition)　任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について，人々の他の選

*26 $y = w$ の場合は個人 1 が xP_1y，2 が yP_2z という選好を持つときに非循環性によって社会的選好が xRz とならなければならないが，zP_1x，zP_2x の場合にパレート原理と矛盾する。

択肢に関する選好に対応して社会的選好が xPy となるような x と y に関するプロフィールが少なくとも 1 つある。

無関係選択肢からの独立性の条件を仮定しなければ x，y 以外の選択肢に関する人々の選好が x と y についての社会的選好に影響することがある。この条件はその場合でも「人々の他の選択肢に関する選好に対応して」x と y に関する適当なプロフィールを選べば xPy とできることを求めるものである。パレート原理が成り立てば任意の x，y についてすべての人々が xP_iy のときには他の選択肢に関する選好に関係なく xPy となるので厳密な非賦課性が満たされている。しかし逆は必ずしも成り立たない。すなわち厳密な非賦課性はパレート原理よりも弱い条件である。この弱い条件でも個人の権利（最小自由主義）と両立しないことが示される。

定理 5.4. 「定義域の非限定性」「最小自由主義」および厳密な非賦課性，非循環性を満たす社会選択ルールは存在しない。

証明. 証明は定理 5.2 とよく似ている。まず最小自由主義の条件において $x = z$ のように一方が同じ選択肢であると仮定し，次のようなプロフィールを考える。

(1). 個人 1：xP_1y，xP_1w
(2). 個人 2：yP_2x，wP_2x
(3). 他の人々：特定しない

最小自由主義によって社会的に xPy，wPx でなければならない。したがって非循環性によって wRy でなければならない。一方 y と w については各個人の選好について何も仮定されていないから，厳密な非賦課性の条件により yPw となるようなプロフィールがある。しかしこれは非循環性に反する。

次に 4 つの選択肢がすべて異なるものとし，次のようなプロフィールを考える。

(1). 個人 1：xP_1y，xP_1z，wP_1y，wP_1z
(2). 個人 2：zP_2w，zP_2x，yP_2w，yP_2x
(3). 他の人々：特定しない

最小自由主義によって社会的に xPy，zPw でなければならない。一方 y と z，x と w については各個人の選好について何も仮定されていないから，厳密な非賦課性により yPz かつ wPx となるようなプロフィールがある。しかしこれは非循環性に反する。 ☺

社会的選好に非循環性ではなく推移性を要求することによって厳密な非賦課性をウィルソンの定理と同じような非賦課性に弱めることができる（厳密な非賦課性と同様に「無関係選択肢からの独立性」の精神が含まれている）。

非賦課性 (non-imposition)　任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について，人々の他の選択肢に関する選好に対応して xRy となるような x と y に関するプロフィールが少なくとも 1 つある。

この条件は，x，y 以外の選択肢に関する人々の選好が x と y についての社会的選好に影響するときでも，x と y に関する適当なプロフィールを選べば xRy とできることを求めるものである。

定理 5.5. 「定義域の非限定性」「最小自由主義」および非賦課性，推移性を満たす社会選択ルールは存在しない。

証明. 証明（Kelsey ではこの証明は省略されている）は定理 5.4 とほぼ同じである。まず最小自由主義の条件において $x = z$ のように一方が同じ選択肢であると仮定し，次のようなプロフィールを考える。

(1). 個人 1：xP_1y，xP_1w
(2). 個人 2：yP_2x，wP_2x
(3). 他の人々：特定しない

最小自由主義によって社会的に xPy，wPx でなければならない。一方 y と w については各個人の選好について何も仮定されていないから，非賦課性により yRw となるようなプロフィールがある。しかしこれは推移性に反する。

次に 4 つの選択肢がすべて異なるものとし，次のようなプロフィールを考える。

(1). 個人 j：xP_jy，xP_jz，wP_jy，wP_jz
(2). 個人 k：zP_kw，zP_kx，yP_kw，yP_kx
(3). 他の人々：特定しない

最小自由主義によって社会的に xPy，zPw でなければならない。一方 y と z，x と w については各個人の選好について何も仮定されていないから，非賦課性により yRz かつ wRx となるようなプロフィールがある。しかしこれは推移性に反する。 ☺

6　多数決ルールについて (May(1952)，Sen and Pattanaik(1969) および Sen(1970))

社会選択ルールで最もわかりやすいのは多数決ルールである。しかし多数決は推移性も準推移性も非循環性も満たさない可能性がある。ここで多数決とは選択肢を 2 つづつ比べてどちらがよいかまたは無差別であるかを社会を構成する人々の選好にもとづいて決めるルールであり，過半数がどちらかを選べば社会的にもそれが選好され，同数の場合には無差別となる。過半数を基準に決める場合「単純多数決ルール (simple majority rule)」と呼ばれるが，以下では単に「多数決ルール (majority rule)」と呼ぶ[*27]。

[*27] 本節は K. May, "A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision", *Econometrica*, vol. 20, pp. 680-684, 1952. および A. Sen and P. Pattanaik, "Necessary and sufficient conditions for rational choice under majority decision", *Journal of Economic Theory*. vol. 1, pp. 178-202, 1969. にもとづく。それぞれの内容について A. Sen, *Collective Choice and Social Welfare*(1970, Holden-Day)（邦訳『集合的選択と社会的厚生』（勁草書房））第 5，5* 章，第 10，10* でも詳しく説明されている。本節の解説は後者に沿ったものである。

例 6.1 (投票のパラドックス). 3 人の人 1，2，3，3 つの選択肢 x，y，z があり次のような選好を持つものとする。

(1). 個人 1：xP_1yP_1z
(2). 個人 2：yP_2zP_2x
(3). 個人 3：zP_3xP_3y

x と y を比較すると x を好む人の方が多いので社会的に x が選ばれる（xPy）。同様にして yPz，zPx が得られるが，これらは非循環性すら満たさない。

推移性は満たさないが，一方で多数決ルールは他のいくつかの望ましい条件を満たす。また人々の選好が（ある種の基準で）ある程度似通っていたり，逆に極端に対立する状況にあれば多数決ルールが準推移性（P の推移性）あるいは推移性を満たすことも知られている。前半では「定義域の非限定性」の条件を仮定する。後半で人々の選好が似通っている場合などを考えるときにはこの条件を緩めることになる。

6.1　匿名性，中立性，正の反応性

多数決ルールが満たす望ましい条件とは以下のようなものである。

匿名性 (anonymity)　すべての個人を対等に扱うような社会選択ルールは匿名性を満たすと言われる。これは人々の選好の組み合わせが同じならば誰がどの選好を持っていても社会的選好は変わらないということである。匿名性は非独裁性を意味するが，独裁者がいなくてもすべての人々が対等に扱われているとは限らないので逆は言えない。

中立性 (neutrality)　これは Geanakoplos によるアローの定理の証明でも出てきた条件で，「すべての選択肢が同じように扱われている」という意味であるが，より詳しく言うと，社会選択ルールが『あるプロフィール p における選択肢 x と y についての各個人の選好と，別のプロフィール p'（p' と p が同一のプロフィールである場合も含む）における選択肢 z と w についての各個人の選好とが同じであれば，p における x と y についての社会的選好と p' における z と w についての社会的選好とは同じである』という条件を満たすとき中立性を満たすと言う。z と w がそれぞれ x と y に一致する場合，あるいは y と x に一致する場合，一方だけが x，y のいずれかと一致する場合も含む。

正の反応性 (positive responsiveness)　これも以前に見た条件であるが，再説しておこう。「任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) について，あるプロフィール p において社会的選好が xRy であるとする。1 人の個人 i の x，y に関する選好が「xI_iy から xP'_iy」または「yP_ix から xI'_iy または xP'_iy に」変った後のプロフィールを p' とすると $xP'y$ である」とき正の反応性を満たす。

1 人 1 票の多数決ルールは明らかに匿名性を満たす。人々の選好が異なるときに全員が独裁者であることはできないので独裁的なルールは匿名性を満たさない。また国連安全保障理事会のように一部の国にだけ拒否権が与えられているようなルールも匿名性を満たさない。しかし全員に拒否権が

与えられているルールは匿名性を満たす可能性がある。

中立性はすべての選択肢を対等に扱うということを意味するが，この条件は「無関係選択肢からの独立性」を意味している。

補題 6.1. 中立性を満たす社会選択ルールは「無関係選択肢からの独立性」を満たす。

証明. 上の中立性の定義において z，w がそれぞれ x，y と同一であると考えてみる。そうすると中立性の定義においては x，y とそれ以外の選択肢との間の選好，および x，y 以外の選択肢同士に関する選好にはまったく触れていないので，それが変化しても x と y に関する社会的選好は変わらないことになるから「無関係選択肢からの独立性」が満たされる。 ☺

多数決ルールは y より x を好む人と x より y を好む人の数に応じて社会的にどちらを好むかを決めるルールであるから，x と y を z と w に置き換えても同じことが言えるので中立性を満たしている。また x と y が同点の状態で 1 人の選好が yP_ix から xI_iy に，あるいは xI_iy から xP_iy に変われば x の支持者が 1 人増えるか y の支持者が 1 人減るので明らかに正の反応性を満たす。

さて多数決ルールは以上の条件を満たすことがわかったが他にそのようなルールはあるのだろうか。実はないのである。

定理 6.2. 「定義域の非限定性」，匿名性，中立性，正の反応性を満たす社会選択ルールは多数決ルールのみである。

証明. まず中立性は「無関係選択肢からの独立性」を意味するので，選択肢 x，y に関する社会的選好はこの 2 つについての個人の選好のみによって決まらなければならない。また匿名性によって誰が y より x を好むかあるいは x より y を好むかということを考慮に入れてはならない，したがって匿名性，中立性を満たす社会選択ルールは y より x を好む人，x より y を好む人，無差別である人の人数によって社会的選好を決めなければならない。これで多数決にだいぶ近づいた。しかし人数のみによって決めると言っても 3 分の 2 や 4 分の 3 以上の賛成を求めるなどのルールもあるのでこれだけでは多数決（「単純」多数決）にはならない。

再び中立性によって，y より x を好む人と x より y を好む人の数が同じであれば社会的に両者は無差別（xIy）でなければならない。なぜならば中立性は x と y とを入れ替えたときには社会的選好においても入れ替わらなければならないことを意味するが，同数であれば入れ替えてもやはり同数であるから人数のみによって決まる社会的選好が変わってはならず無差別であるしかない[*28]。x と y が同点の状態で 1 人の選好が，正の反応性の定義の中の説明と同じようにして y より x を好む方向に変わったとしてみよう。すると正の反応性によって社会的にも y より x を好む方向に変わらなければならない。これは「単純」多数決に他ならない。 ☺

ここで次の言葉を定義する。

強いパレート原理 (strong Pareto principle)　任意の 2 つの選択肢の組 (x, y) についてすべての

[*28] xPy となるのに 3 分の 2 以上の人々が xP_iy でなければならないとし，一方 yPx となるには yP_ix である人々が 3 分の 1 を越えればよいというようなルールは中立性を満たさない。

人々が y より x を好むか無差別であり，少なくとも 1 人の人が y より x を好むならば社会的に y より x が好まれる。

パレート原理では全員が x を好んでいなければいけなかったが，この条件では x より y を好む人がいなければ無差別な人がいてもかまわない。

補題 6.3 (強いパレート原理). 中立性と正の反応性を満たす二項的社会選択ルールは強いパレート原理を満たす。

証明. 中立性によって全員が x と y について無差別ならば社会的にも無差別になる。そこで 1 人の選好が y より x を好む方向に変れば正の反応性によって社会的にも y より x が好まれる。 ☺

6.2 価値制限，限定的同意と準推移性

次に人々の選好がある程度似通っていれば多数決ルールが準推移性を満たす可能性について考えてみよう。『ある程度似通っている』という条件は次のように二通りに表せる。

価値制限 (value restriction) ある 3 つの選択肢の組 $(x,\ y,\ z)$ について，『すべての選択肢について無差別であるような人々』（**関与しない人々**と呼ぶ）を除いてすべての人々が，**いずれかは最良でない，いずれかは中間でない，いずれかは最悪でない**ということについて同意するならばその 3 つの選択肢の組について**価値制限**が成り立つと言う。

例えば個人 1，2，3 が x，y，z について xP_1yP_1z，yP_2zP_2x，zP_3yP_3x という選好を持つならば y が最悪ではないということについて同意している。このとき 2 つづつを多数決によって比較すれば yPz，zPx，yPx となり準推移性を満たしている。この例は，先に見た「投票のパラドックス」の例（xP_1yP_1z，yP_2zP_2x，zP_3xP_3y）の内で個人 3 の x と y に関する選好を逆にしただけであるから，かなりの程度に意見の相違を認めるものである。多数決も捨てたものではない。

限定的同意 (limited agreement) ある 3 つの選択肢の組 $(x,\ y,\ z)$ について全員が y より x を好むかまたは無差別であるというような選択肢の組が存在する。

価値制限について次のことが言える。

補題 6.4. ある 3 つの選択肢の組 $(x,\ y,\ z)$ について価値制限が成り立つ場合，次の 6 つの主張の内，(1)〜(3) の少なくとも 1 つ，および (4)〜(6) の少なくとも 1 つが成り立つ[*29]。

(1). xR_iyR_iz である人は xI_iyI_iz である。
(2). yR_izR_ix である人は xI_iyI_iz である。
(3). zR_ixR_iy である人は xI_iyI_iz である。
(4). yR_ixR_iz である人は xI_iyI_iz である。

[*29] 価値制限の定義においては，例えば xP_iyI_iz という選好を持つ人は y と z を最悪とも中間とも考えていると解釈する。同様に xI_iyR_iz という選好を持つ人は x と y を最良とも中間とも考えている。

(5). xR_izR_iy である人は xI_iyI_iz である。
(6). zR_iyR_ix である人は xI_iyI_iz である。

証明. 関与する（すべてに無差別ではない）人々について x が最良ではないとする。すると xR_iyR_iz または xR_izR_iy である人々は関与しないことになり xI_iyI_iz（すべてに無差別）でなければならないから (1) と (5) が成り立つ。同様にして y が最良でなければ (2) と (4) が，z が最良でなければ (3) と (6) が成り立つ。関与する人々について x が最悪でなければ (2) と (6) が，y が最悪でなければ (3) と (5) が，z が最悪でなければ (1) と (4) が成り立つ。関与する人々について x が中間でなければ (3) と (4) が，y が中間でなければ (1) と (6) が，z が中間でなければ (2) と (5) が成り立つ。 ☺

ここで次の定理を得る。

定理 6.5. 完備性を満たす社会選択ルールが中立性，正の反応性，そしてあらゆる 3 選択肢の組について「価値制限」を満たせば準推移性を満たす。

証明. ある 3 選択肢 x，y，z について準推移性が成り立たないとすれば次の 6 つの関係のいずれかが成り立つ。

$$xPy,\ yPz \text{ かつ } zRx,\quad yPz,\ zPx \text{ かつ } xRy$$

$$zPx,\ xPy \text{ かつ } yRz,\quad xPz,\ zPy \text{ かつ } yRx$$

$$yPx,\ xPz \text{ かつ } zRy,\quad zPy,\ yPx \text{ かつ } xRz$$

補題 6.4 の (1)〜(3) の 1 つ，および (4)〜(6) の 1 つが成り立てばこのような関係はありえないことを示す。まず (1) を仮定してみる。関与する人々（xI_iyI_iz でない人々）は xR_iyR_iz ではないから，xR_iy ならば zP_iy，yR_iz ならば yP_ix でなければならない。したがって関与しない人々も含めて次の関係が成り立つ

$$xP_iy \text{ ならば } zP_iy,\ xI_iy \text{ ならば } zR_iy,\ yP_iz \text{ ならば } yP_ix,\ yI_iz \text{ ならば } yR_ix$$

中立性と正の反応性によって社会的には次の関係が成り立つ。

$$xRy \text{ ならば } zRy,\ yRz \text{ ならば } yRx$$

[説明]

すべての人々について，xP_iy ならば，またそのときのみ zP_iy，xI_iy ならば，またそのときのみ zI_iy

が成り立てば x と y の関係と z と y の関係が同じであるので，中立性によって社会的にも同じでなければならず

$$xPy \text{ ならば } zPy,\ xIy \text{ ならば } zIy$$

を得る。このとき

すべての人々について，yP_ix ならば，またそのときのみ yP_iz

も成り立っている。ここで上記の条件が

$$すべての人々について，xP_iy \text{ ならば } zP_iy，xI_iy \text{ ならば } zR_iy$$

に変わったとすると zI_iy が zP_iy に，yP_iz（yP_ix の人）が zI_iy または zP_iy に変わる場合があるので正の反応性により

$$xPy \text{ ならば } zPy，xIy \text{ ならば } zRy$$

となる。人々の選好がそのように変化しなければ中立性によって社会的選好は変わらない。これは「xRy ならば zRy」を意味する。同様にして

$$すべての人々について，yP_iz \text{ ならば } yP_ix，yI_iz \text{ ならば } yR_ix$$

が成り立てば

$$yPz \text{ ならば } yPx，yIz \text{ ならば } yRx$$

となり，これは「yRz ならば yRx」を意味する。

したがって

$$xRy \text{ かつ } yRz \text{ ならば } xRy，yRx，zRy，yRz$$

すなわち

$$xRy \text{ かつ } yRz \text{ ならば } xIy \text{ かつ } yIz$$

が得られる。これに zRx という条件を加えると

$$xRy，yRz \text{ かつ } zRx \text{ ならば } xIy \text{ かつ } yIz$$

を意味する。(2) が成り立つ場合は今の議論で x，y，z をそれぞれ y，z，x に入れ替えて

$$xRy，yRz \text{ かつ } zRx \text{ ならば } yIz \text{ かつ } zIx$$

が，(3) の場合は x，y，z をそれぞれ z，x，y に入れ替えて

$$xRy，yRz \text{ かつ } zRx \text{ ならば } zIx \text{ かつ } xIy$$

が得られる。したがって (1)，(2)，(3) のどれか 1 つが成り立つとき xRy，yRz かつ zRx ならば x，y，z の 2 つの組について無差別関係が成り立たなければならず

$$xPy，yPz \text{ かつ } zRx$$

$$yPz，zPx \text{ かつ } xRy$$

$$zPx，xPy \text{ かつ } yRz$$

の 3 つの関係はどれも成り立ち得ない。

(4) が成り立つときには (1) の場合の議論で x，y，z をそれぞれ y，x，z に入れ替えて

$$yRx \text{ かつ } xRz \text{ ならば } yIx \text{ かつ } xIz$$

を得る。これに zRy という条件を加えると

$$yRx,\ xRz \text{ かつ } zRy \text{ ならば } yIx \text{ かつ } xIz$$

となる。(5) の場合は (4) の議論の y，x，z をそれぞれ x，z，y に入れ替えて

$$yRx,\ xRz \text{ かつ } zRy \text{ ならば } xIz \text{ かつ } zIy$$

を得る。(6) の場合は y，x，z をそれぞれ z，y，x に入れ替えて

$$yRx,\ xRz \text{ かつ } zRy \text{ ならば } zIy \text{ かつ } yIx$$

となる。したがって (4)，(5)，(6) のどれか 1 つが成り立つとき yRx，xRz かつ zRy ならば x，y，z の 2 つの組について無差別関係が成り立たなければならず

$$xPz,\ zPy \text{ かつ } yRx$$

$$yPx,\ xPz \text{ かつ } zRy$$

$$zPy,\ yPx \text{ かつ } xRz$$

の 3 つの関係は成り立ち得ない。よって準推移性が成り立つ。 ☺

多数決ルールは中立性，匿名性を満たすので価値制限が成り立てば準推移性を満たす[*30]。

「限定的同意」については次の定理が得られる。

定理 6.6. 完備性を満たす社会選択ルールが中立性，正の反応性そしてあらゆる 3 選択肢の組について「限定的同意」を満たせば準推移性を満たす。

証明. ある 3 選択肢 x，y，z について全員の選好が xR_iy であるとする。したがって次の関係が成り立つ

$$\text{すべての人々について，} yR_iz \text{ ならば } xP_iz,\ yI_iz \text{ ならば } xR_iz$$

中立性と正の反応性により

$$yRz \text{ ならば } xRz$$

が得られる[*31]。同様にして

$$zRx \text{ ならば } zRy$$

[*30] 人数が 2 人であれば価値制限がなくても準推移性を満たす。注*21 参照。

[*31]

$$\text{すべての人々について，} yP_iz \text{ ならば，またそのときのみ } xP_iz,\ yI_iz \text{ ならば，またそのときのみ } xI_iz$$

が成り立てば y と z の関係と x と z の関係が同じであるので，中立性によって社会的にも同じでなければならず

$$yPz \text{ ならば } xPz,\ yIz \text{ ならば } xIz$$

を得る。このとき

$$\text{すべての人々について，} zP_iy \text{ ならば，またそのときのみ } zP_ix$$

も成り立っている。ここで上記の条件が

$$\text{すべての人々について，} yP_iz \text{ ならば } xP_iz,\ yI_iz \text{ ならば } xR_iz$$

を得る。xRy という関係を加えると

$$「xRy \text{ かつ } yRz \text{ かつ } zRx」\text{ならば}「xRy,\ yRz,\ zRx,\ xRz,\ zRy」$$

すなわち

$$「xRy \text{ かつ } yRz \text{ かつ } zRx」\text{ならば}「xRy \text{ かつ } yIz \text{ かつ } zIx」$$

という関係が得られる。ここで yRx と仮定してみよう。すべての人々が xR_iy である（限定的同意の仮定により）から強いパレート原理（補題 6.3）によってすべての人々が xI_iy でなければならない（1 人でも xP_iy ならば xPy となる）。これはすべての人々が yR_ix であることを意味するから，上の議論の x と y を入れ替えることによって

$$「yRx \text{ かつ } xRz \text{ かつ } zRy」\text{ならば}「yRx \text{ かつ } xIz \text{ かつ } zIy」$$

という関係が得られる。もし準推移性が成り立たないとすれば「xRy かつ yRz かつ zRx」または「yRx かつ xRz かつ zRy」のいずれかが成り立たなければならない。しかし，そのとき 3 つの関係の内の少なくとも 2 つは無差別関係となる。そのことはこれらが準推移性を否定することにならないということを意味する[*32]。したがって準推移性が満たされる。 ☺

以上により価値制限，限定的同意はそれぞれ多数決が準推移性を満たすための十分条件である。

6.3 極値制限と推移性

次に人々の選好に対する価値制限，限定的同意とは別の制約について考えてみる。

極値制限 (extremal restriction)　ある 3 つの選択肢の組 (x，y，z) について，ある人（個人 i とする）が xP_iyP_iz という選好を持っているとする。そのとき z を唯一の最良な選択肢であると見なすすべての人々は x を唯一の最悪な選択肢であると見なしている，また x を唯一の最悪な選択肢であると見なすすべての人々は z を唯一の最良な選択肢であると見なしている，ということが x，y，z のいかなる順序についても成り立つならば[*33]，その 3 つの選択肢の組について極値制限が成り立つ。

これはある人が x を最も好み z を最も好まない（最も嫌う）とき，もし誰かが z を最も好むならばその人は x を最も嫌わなければならず，誰かが x を最も嫌うならばその人は z を最も好まなけ

に変わったとすると xI_iz が xP_iz に，zP_ix（xP_iy の人）が xI_iz または xP_iz に変わる場合があるので正の反応性により

$$yPz \text{ ならば } xPz,\ yIz \text{ ならば } xRz$$

となる。人々の選好がそのように変化しなければ中立性によって社会的選好は変わらない。これは『yRz ならば xRz』を意味する。

[*32] 準推移性が成り立たないならば「xPy かつ yPz のとき zRx」や「yPx かつ xPz のとき zRy」などが成り立たなければならない。しかし 3 つの関係の内の少なくとも 2 つが無差別関係であるということはこれらが成り立たないことを意味する。

[*33] ある人が zP_ixP_iy という選好を持っているとすると，y を唯一の最良な選択肢であると見なすすべての人々は z を唯一の最悪な選択肢であると見なしている，また z を唯一の最悪な選択肢であると見なすすべての人々は y を唯一の最良な選択肢であると見なしている。他の順序も同様。

ればならないことを要求する。利害や意見の対立する人々がいるならば正反対の選好を持つことを求め，中途半端な選好（yP_izP_ix のような）は許さないという条件である。少々厳しい条件であるが，思想・宗教の違いなどで選択肢に対する人々の評価が対立的になっている場合には適当な制約であるかもしれない。

この極値制限と上で見た価値制限，限定的同意とはどちらがどちらを意味するというわけではなく独立したものである。

補題 6.7. 極値制限，価値制限，限定的同意はそれぞれ独立した性質である。

証明. 例を上げる。

(1). 個人 1，2，3，4 の 4 人からなる社会について次のようなプロフィールを考える。

(i) 個人 1：xP_1yP_1z

(ii) 個人 2：zP_2yP_2x

(iii) 個人 3：yP_3xI_3z

(iv) 個人 4：xI_4zP_4y

極値制限は成り立つ（xP_1yP_1z と zP_2yP_2x において）が，価値制限（x，y，z のいずれもが最良，最悪，中間となっている）も限定的同意も成り立たない（選好が共通であるような選択肢の組はない)。

(2). 個人 1，2，3 の 3 人からなる社会について次のようなプロフィールを考える。

(i) 個人 1：xP_1yP_1z

(ii) 個人 2：zP_2yP_2x

(iii) 個人 3：yP_3zP_3x

極値制限（yP_3zP_3x と xP_1yP_1z において）も限定的同意も成り立たないが（選好が共通であるような選択肢の組はない)，価値制限は成り立つ（3 人とも y は最悪でない，また x は中間でないと考えている)。

(3). 個人 1，2 の 2 人からなる社会について次のようなプロフィールを考える。

(i) 個人 1：xP_1yP_1z

(ii) 個人 2：zP_2xP_2y

極値制限は成り立たないが，価値制限（x は最悪でない）も限定的同意も成り立つ（xR_iy が共通)。

(4). 個人 1，2 の 2 人からなる社会について次のようなプロフィールを考える。

(i) 個人 1：xP_1yP_1z

(ii) 個人 2：zP_2yP_2x

極値制限と価値制限（y は最良，最悪でない）は成り立つが限定的同意は成り立たない（選好が共通であるような選択肢の組はない)。

(5). 個人 1，2，3 の 3 人からなる社会について次のようなプロフィールを考える。

(i) 個人 1：xP_1yP_1z

(ii) 個人 2：yP_2zI_2x

(iii) 個人 3：zI_3xP_3y

極値制限と限定的同意（xR_iz が共通）は成り立つが価値制限は成り立たない。

(6). 個人 1，2，3，4，5 の 5 人からなる社会について次のようなプロフィールを考える。

(i) 個人 1：xP_1yP_1z

(ii) 個人 2：yP_2zP_2x

(iii) 個人 3：xP_3yI_3z

(iv) 個人 4：xI_4yP_4z

(v) 個人 5：yI_5zP_5x

限定的同意は成り立つ（yR_iz が共通）が，価値制限も極値制限（xP_1yP_1z と yP_2zP_2x において）も成り立たない。

☺

しかし人々の選好が無差別な関係を含まない場合，すなわちあらゆる 2 つの選択肢の組について選好がはっきりしている場合には次のことが言える。

補題 6.8. 人々の選好が無差別な関係を含まない場合には極値制限が成り立てば価値制限も成り立つ（極値制限は価値制限を意味する）。また限定的同意が成り立てば価値制限も成り立つ（限定的同意は価値制限を意味する）。

証明. (1). ある個人 i について xP_iyP_iz であるとする。もし zP_jx であるような人々（j で代表させる）がいない（すべての人が xP_jz）とすると z を最良と見なさないとう点で一致し価値制限が成り立つ。一方 zP_jx であるような人がいるとすれば，その人は極値制限により zP_jyP_jx である[*34]。そのときやはり極値制限によって xP_jz である人は xP_jyP_jz である。したがって人々の選好は xP_jyP_jz または zP_jyP_jx のいずれかであり[*35]，y が最良でない（あるいは最悪でない）という点で一致しているので価値制限が成り立つ。しかし，補題 6.7 の 3 つ目の例からわかるように価値制限が成り立っても極値制限が成り立つとは限らない。

(2). すべての人々について xR_iy であるとする。これは xP_iy を意味する。したがってどの個人にとっても x は最悪ではないので価値制限が成り立つ。

☺

この極値制限と多数決について次の定理を示すことができる。

定理 6.9. 3 つの選択肢のあらゆる組について極値制限が成り立てば多数決ルールは推移性を満たす。

[*34] yP_jzP_jx も zP_jxP_jy も極値制限に反する。
[*35] 人々の選好は zP_jx であるか xP_jz であるかのいずれかである。

証明. x，y，z の 3 選択肢についての個人の選好は以下の 13 通りある。

$$
\begin{aligned}
&(1.1)\ xP_iyP_iz,\ (1.2)\ xP_iyI_iz,\ (1.3)\ xI_iyP_iz\\
&(2.1)\ yP_izP_ix,\ (2.2)\ yP_izI_ix,\ (2.3)\ yI_izP_ix\\
&(3.1)\ zP_ixP_iy,\ (3.2)\ zP_ixI_iy,\ (3.3)\ zI_ixP_iy\\
&(4)\ \ xP_izP_iy,\ (5)\ \ zP_iyP_ix,\ (6)\ \ yP_ixP_iz\\
&(7)\ \ xI_iyI_iz
\end{aligned}
$$

これらの内無差別関係を 1 つでも含むものについては極値制限を議論する余地はなく（xP_iyP_iz のような選好がない）明らかに成り立っている。全員がそのような選好を持つ場合には推移性が成り立つことを示そう。(1.2)，(1.3)，(2.2)，(2.3)，(3.2)，(3.3)，(7) の選好を持つ人々の人数を $N(1.2)$ などで表すことにすると xRy（多数決ルールによって社会的に y より x が選好されるか無差別）かつ yRz のとき

$$N(1.2)+N(3.3)\geq N(2.2)+N(2.3)$$

および

$$N(1.3)+N(2.2)\geq N(3.2)+N(3.3)$$

が成り立つ。この両式を辺々（左辺同志，右辺同志）加えると

$$N(1.2)+N(1.3)\geq N(2.3)+N(3.2)$$

が得られる。これは xRz を意味するから推移性が成り立つ。

以下，少なくとも 1 人が無差別関係を含まない選好を持つとする。xP_iyP_iz という選好を持つ人がいると仮定し，極値制限が成り立っていて社会的選好が推移性を満たさないと仮定してみよう[*36]。まず xP_iyP_iz についての極値制限によって 13 通りの選好の内で (2.1)，(2.3)，(3.1)，(3.2) が排除される[*37]。つまり極値制限が成り立つならばそのような選好を持つ人がいてはならない。

推移性が成り立たないとすると以下の 6 つの関係のいずれか（少なくとも 1 つ）が成り立つ。

(1). xRy かつ yRz であるが zPx である。
(2). zRx かつ xRy であるが yPz である。
(3). yRz かつ zRx であるが xPy である。
(4). yRx かつ xRz であるが zPy である。
(5). zRy かつ yRx であるが xPz である。
(6). xRz かつ zRy であるが yPx である。

初めの 3 つのケースのいずれかが成り立てば zRx でなければならない。xP_iy という選好を持つ人の数を $N(xP_iy)$ などで表すと，zRx のときには $N(zP_ix)\geq N(xP_iz)$ であるが，xP_iyP_iz という選好を持つ人が少なくとも 1 人はいるから zP_ix という選好を持つ人が少なくとも 1 人はいなければならない。極値制限よりそのような人は zP_iyP_ix という選好を持つ。

[*36] xP_iyP_iz 以外の選好，例えば yP_izP_ix という選好を持つ人がいると仮定する場合は x，y，z をそれぞれ y，z，x に入れ替えて議論を進めることによって定理が証明される。
[*37] x が唯一最悪ならば z が唯一最良，z が唯一最良ならば x が唯一最悪でなければならない。

次に後半の 3 つのケースのいずれかが成り立てば zRy と yRx が成り立っていなければならない。このとき $N(zP_iy) \geq N(yP_iz)$，$N(yP_ix) \geq N(xP_iy)$ であるが 4 つの選好が排除されていることを考えるとこれらは以下のように表せる。

$$N(3.3) + N(4) + N(5) \geq N(1.1) + N(1.3) + N(2.2) + N(6)$$
$$N(2.2) + N(5) + N(6) \geq N(1.1) + N(1.2) + N(3.3) + N(4)$$

両式を辺々加えると

$$2N(5) \geq 2N(1.1) + N(1.2) + N(1.3)$$

が得られる。仮定によって $N(1.1) \geq 1$（xP_iyP_iz という選好を持つ人が 1 人はいる）であるから $N(5) \geq 1$ を得る。以上によって (1)〜(6) のいずれかが成り立てば zP_iyP_ix という選好を持つ人が少なくとも 1 人はいなければならない。この zP_iyP_ix に極値制限を適用すると (1.2)，(1.3)，(4)，(6) の 4 つの選好が排除される[*38]。したがって人々の選好は (1.1)，(2.2)，(3.3)，(5)，(7) に限られるが (7) は多数決の結果に影響を及ぼさないので初めの 4 つに限定してよい。その上で推移性を満たさない 6 つのケースについて考えてみよう。

(1). xRy かつ yRz であれば

$$N(1.1) + N(3.3) \geq N(2.2) + N(5)$$
$$N(1.1) + N(2.2) \geq N(3.3) + N(5)$$

である。両式を辺々加えると

$$N(1.1) \geq N(5)$$

が得られる。これは xRz を意味する。したがって zPx とはならず推移性が成り立つ。

(2). zRx かつ xRy であれば

$$N(5) \geq N(1.1)$$
$$N(1.1) + N(3.3) \geq N(2.2) + N(5)$$

である。上の方の式の両辺を 2 倍して辺々加えると

$$N(5) + N(3.3) \geq N(1.1) + N(2.2)$$

が得られる。これは zRy を意味する。したがって yPz とはならず推移性が成り立つ。

(3). 同様（各自確認していただきたい）。

(4). yRx かつ xRz であれば

$$N(2.2) + N(5) \geq N(1.1) + N(3.3)$$
$$N(1.1) \geq N(5)$$

である。下の方の式の両辺を 2 倍して辺々加えると

$$N(1.1) + N(2.2) \geq N(3.3) + N(5)$$

が得られる。これは yRz を意味する。したがって zPy とはならず推移性が成り立つ。

[*38] z が唯一最悪ならば x が唯一最良，x が唯一最良ならば z が唯一最悪でなければならない。

(5). zRy かつ yRx であれば

$$N(3.3) + N(5) \geq N(1.1) + N(2.2)$$

$$N(2.2) + N(5) \geq N(1.1) + N(3.3)$$

である。両式を辺々加えると

$$N(5) \geq N(1.1)$$

が得られる。これは zRx を意味する。したがって xPz とはならず推移性が成り立つ。

(6). 同様（各自確認していただきたい）。

☺

この結論は多数決ルールについて成り立つだけであり，その他のルールについては中立性が満たされたとしても必ずしも成り立たない。

さらにこの極値制限は多数決ルールが推移性を満たすための必要十分条件であることが示される。定理 6.9 の逆を証明しよう。

定理 6.10. 多数決ルールが推移性を満たすならば 3 つの選択肢のあらゆる組について極値制限が成り立つ。

証明. 極値制限が成り立たないと仮定する。これは例えば xP_iyP_iz という選好を持つ個人がいれば，他に次のいずれかの選好を持つ個人が存在することを意味する。

(1). zP_jxR_iy
xP_iyP_iz という選好を持つ人と，zP_jxR_iy という選好を持つ人が同数いるとすれば，多数決によって xPy，yIz，xIz となるが，これらは推移性を満たしていない。

(2). yR_jzP_ix
xP_iyP_iz という選好を持つ人と，yR_jzP_ix という選好を持つ人が同数いるとすれば，多数決によって xIy，yPz，xIz となるが，やはりこれらは推移性を満たしていない。

したがって極値制限の必要性が示された。つまり極値制限が成り立たなければ多数決が推移性を満たさない可能性がある。十分性は定理 6.9 で示されているので，必要十分条件である。 ☺

価値制限，極値制限，限定的同意のいずれかを満たすことが多数決ルールが準推移性を満たすための必要十分条件であることも証明できるが，本節は十分長くなったので省略する。

7 ギバード・サタースウェイトの定理の証明 (Barbera(1983, *International Economic Review*))

ここまでは人々の選好にもとづいて社会的な選好を決める二項的社会選択ルールについて考えてきたが，ここからは選択肢の集合の中から社会的に最も望ましい選択肢 1 つを選ぶ「社会的選択関

数」をめぐる問題について検討していきたい[*39]。人々の選好にもとづいて選択肢を 1 つ選ぶのであるが，投票などの実際の手続きにおいては「表明された」あるいは「報告された」人々の選好にもとづいて選択肢を選ぶしかない。しかし人々が必ずしも正直に自らの選好を表明するとは限らない。場合によっては，他の人々による選好の表明を与えられたものとして自分の真の選好とは異なる偽りの選好を表明した方が真の選好を表明した場合よりも自分にとってよりよい選択肢を実現することができるかもしれない。それでは社会的な意思決定方法として好ましいとは言えないであろう。ある個人 i があるプロフィール p において，真実とは異なる選好を自らの選好として表明することによって社会的選択関数によりよい選択肢を選ばせることができる場合，その社会的選択関数は p において i によって戦略的に操作可能 (manipulable) であると言う。ある社会的選択関数がいかなるプロフィールにおいても誰にとっても操作可能でないならば，その社会的選択関数は戦略的に操作不可能 (strategy-proof) であると言う。

ここで，後の節で取り上げる Muller and Satterthwaite(1977) にもとづいて（少し変えてあるが）2 つの例を考えてみよう。

例 7.1 (多数決とボルダルール). 4 つの選択肢 x，y，z，w をとり，5 人からなる社会において次の 2 つのプロフィールを考える。

プロフィール p

(1). 個人 1：$xP_1wP_1zP_1y$
(2). 個人 2：$xP_2wP_2zP_2y$
(3). 個人 3：$yP_3zP_3xP_3w$
(4). 個人 4：$zP_4yP_4xP_4w$
(5). 個人 5：$wP_5yP_5xP_5z$

プロフィール p'

(1). 個人 1：$xP'_1yP'_1zP'_1w$
(2). 個人 2：$xP'_2zP'_2yP'_2w$
(3). 個人 3：$yP'_3xP'_3zP'_3w$
(4). 個人 4：$yP'_4zP'_4xP'_4w$
(5). 個人 5：$yP'_5xP'_5wP'_5z$

(1). 多数決：ここで言う「多数決」は前の節で考えたような選択肢を 2 つづつ比べてその優劣を決めるような多数決ルール (majority rule) ではなく，4 つ全体から各自が最も好むものに投票させ最多の票を得た選択肢を選ぶ方法であり plurality rule と呼ばれる。同点の場合は決選投票で決めることにする。多数決によるとプロフィール p では x が，p' では y が選ばれる。もし p において個人 4 が真の選好 $zP_4yP_4xP_4w$ ではなく p' の選好 $yP'_4zP'_4xP'_4w$ を表明するとどうなるであろうか。そのとき最初の投票で x，y ともに 2 票を得て同点となるので x と y の間で決選投票を行うと x が 2 票を得るのに対して y には 3 票（個人 4 が p，

[*39] 投票などの方法で選択肢を選ぶとき同点になる可能性もあるが，その場合も何らかの手段で 1 つの選択肢を選ぶものとする。

p' どちらの選好を表明しても）が入るので y が選ばれる。個人 4 は p において x より y を好んでいるのでそうすることによって真の選好を表明するよりもよりよい状態を実現することができる。したがって多数決は戦略的に操作不可能ではない。

(2). ボルダルール：ボルダルールとは各自の選好にもとづいて選択肢に点数をつけ合計の点数が最も大きい選択肢を選ぶものである。ここでは各自が最も好む選択肢から順に 4，3，2，1 の点数をつけるものとする。そうすると p においては x が 14 点，y が 12 点，z が 12 点，w が 12 点で x が選ばれ，p' においては x が 16 点，y が 17 点，z が 11 点，w が 6 点で y が選ばれる。もし p' において個人 1 が真の選好 $xP'_1yP'_1zP'_1w$ ではなく p の選好 $xP_1wP_1zP_1y$ を表明するとどうなるであろうか。そのとき x の 16 点は変わらないが，y は 15 点に下がって x が選ばれることになる。個人 1 は p' において y より x を好んでいるのでそうすることによって真の選好を表明するよりもよりよい状態を実現することができる。したがってボルダルールも戦略的に操作不可能ではない。

戦略的に操作不可能な社会的選択関数はあるのであろうか？この問題に対して極めて否定的な結論をもたらすのがギバード・サタースウェイトの定理である。なお本節以降では「定義域の非限定性」を仮定する。すなわち人々の選好についてはいかなる制約も加えない。また人々の選好のプロフィールに応じて社会的選択関数によって選ばれる選択肢の数は 3 つ以上であると仮定する。これを「値域 (range) が 3 つ以上である」と言うことにする。特定の 2 つの選択肢のいずれかしか選ばないような社会的選択関数は考えない。

定理 7.1 (ギバード・サタースウェイトの定理 (Gibbard-Satterthwaite Theorem)). 「定義域の非限定性」を満たし値域が 3 つ以上である社会的選択関数が戦略的に操作不可能であれば独裁者が存在する。

ここで社会的選択関数の独裁者とは，常に（いかなるプロフィールにおいても）自らが最も好む選択肢（の 1 つ）が社会的選択関数によって選ばれるような個人のことを指す。

本節では Barbera による比較的コンパクトなこの定理の証明を紹介する[*40]。次の節で Gibbard 自身の証明を解説する。また本節では人々の選好に無差別な関係が含まれていない場合を考える。したがって個人の選好を R_i ではなく P_i で表す。次節では一般的なケースを取り扱う。

社会的選択関数を f，プロフィール p において f が選ぶ選択肢を $f(p)$ で表す。証明の前にいくつか言葉を定義する。

set of options（選択集合） プロフィール p において個人 i が自らの表明する選好をいろいろ変えることによって（他の人々の選好は p における選好に固定されている）社会的選択関数 f に選ばせることができる選択肢の集合を，個人 i の p における選択集合と呼び $o(i,p)$ と書く。

pivotal 以前にも出てきた言葉であり似かよった意味で使われる。$o(i,p)$ は 1 つ以上の選択肢を含むが，もしそれが 2 つ以上の選択肢を含んでいるならば個人 i は p において pivotal であ

[*40] 本節は S. Barbera, “Strategy-proofness and pivotal voters: a direct proof of the Gibbard-Satterthwaite theorem”, *International Economic Review*, vol. 24,, pp. 413-418, 1983. にもとづく。

ると言う。ある個人が pivotal であるとは，何らかの形で社会的選択関数が選ぶ選択肢を変えることができるということを意味する。

選好の並べ替え (reshuffling)　ある個人の選好 P_i において選択肢 x と他の選択肢に関する選好が変化しないような形で選好を変化させることを「x の周りの並べ替え」と言い，そのような並べ買えによって実現される選好の集合を $r(P_i, x)$ と書く。

さらに記号をいくつか説明する。プロフィール p において個人 i の選好が P_i において P_i' へ変化したときのプロフィールを p/P_i' で表す。また選択肢のある集合 B の中で個人 i がその選好 P_i において最も好む選択肢を $C(B, P_i)$ とする。ある選好 P_i において x を最下位に移動させてできる選好を ${}_xP_i$ と表す。x が移動する以外の選好の変化はない。逆にある選好 P_i において x を最上位に移動させてできる選好を ${}^xP_i$ と表す。やはり x が移動する以外の選好の変化はない。最後に個人の選好の集合を $\mathscr{P}$ で表す。

ここで，選ばれる選択肢の数が 3 つ以上でなければいけないという条件の意味を検討する。次のような f を考えてみよう

f： 各プロフィール p において，f は個人 1 または 2 が最も好む選択肢を選ぶ（いずれか 1 つ）

常にどちらかの人が最も好む選択肢のみを選ぶのでなければ独裁者はいない。個人 1 が最も好む選択肢と個人 2 が最も好む選択肢のどちらを選ぶかについて選択肢のアルファベット順などで決めておけば，自分が最も好む選択肢が選ばれていない方の人が自らの選好を偽って表明しても選ばれる選択肢を変えることができないので戦略的に操作可能ではない。したがって選ばれる選択肢の数が 3 つ以上でなければ条件を満たす社会的選択関数が存在することがわかる。

では証明して行こう。

ギバード・サタースウェイトの定理の証明. いくつかの手順に分ける。ある社会的選択関数 f が戦略的に操作不可能であるとする。

(1).「f が戦略的に操作不可能ならば，あるプロフィール p において f が選ぶ選択肢は，各個人（i で表す）にとってその選択集合に含まれる選択肢の中で最良（p における i の選好 P_i で評価して）の選択肢でなければならない。」
もしそうでなければ P_i とは異なる選好を表明することによってよりよい状態を実現できることになる。

(2).「いかなるプロフィール p においても，どの個人も $f(p)$ の周りの並べ替え（選好の P_i から P_i' への変化）によって f が選ぶ選択肢を変えることはできない。」
変えることができるとすると，個人 i が p において（選好 P_i において）$f(p)$ より $f(p/P_i')$ を好むならば彼は p において P_i' を表明することによって f を操作することが可能であり，また p/P_i' において（選好 P_i' において）$f(p/P_i')$ より $f(p)$ を好むならば p/P_i' において P_i を表明することによって f を操作することが可能である[*41]。

[*41] P_i' は P_i の $f(p)$ の周りの並べ替えであるから，P_i と P_i' における $f(p)$ と $f(p/P_i')$ に関する選好は同一である。

(3).「プロフィール p においてある個人 i の選好が $f(p)$ の周りの並べ替え（P_i から P'_i への変化）によって変化しても他の人の選択集合を変化させることはできない。」

i 以外のある個人を j として $o(j,p/P'_i) \subseteq o(j,p)$ を示す。$o(j,p/P'_i) \not\subseteq o(j,p)$ と仮定しよう。すると $o(j,p/P'_i)$ に含まれていて $o(j,p)$ に含まれない選択肢がある。それを y とする。すなわち $y \in o(j,p/P'_i)$ かつ $y \notin o(j,p)$ である。また $f(p) = f(p/P'_i) = x \neq y$（$x \in o(j,p)$ である）とする。(1) より $x = C(o(j,p),P_j)$ であり，$y \notin o(j,p)$ であるから $x = C(o(j,p),{}^yP_j)$ である。なぜならば y が P_j の最上位に移っても $o(j,p)$ に含まれていないのだから x が $o(j,p)$ の中で最良の選択肢であることに変わりがない。また j の選好が変わっても j の選択集合は同じなので $x = C(o(j,p/{}^yP_j),{}^yP_j)$ であり，(1) より $x = f(p/{}^yP_j)$ である。一方，$y \in o(j,p/P'_i)$ であるから $y = C(o(j,p/P'_i),{}^yP_j)$ なので (1) より $y = f((p/P'_i)/{}^yP_j)$ でなければならない。ここで $(p/P'_i)/{}^yP_j$ は p において i，j2 人の選好が（それぞれ P'_i と ${}^yP_j$ に）変化した後のプロフィールである。そうすると $(p/P'_i)/{}^yP_j = (p/{}^yP_j)/P'_i$ であるから，個人 i が $(p/{}^yP_j)/P'_i$ において（選好 P'_i において）y より x を好むならば彼は $(p/{}^yP_j)/P'_i$ において選好 P_i を表明することによって f を操作することが可能であり，また $p/{}^yP_j$ において（選好 P_i において）x より y を好むならば $p/{}^yP_j$ において選好 P'_i を表明することによって f を操作することが可能である。したがって $y \in o(j,p)$ でなければならない。

$f(p) = f(p/P'_i)$ であり $P_i \in r(P'_i, f(p/P'_i))$ であるから同様にして $o(j,p) \subseteq o(j,p/P'_i)$ が示される。以上によって $o(j,p/P'_i) = o(j,p)$ が証明された。

(4).「次の場合を除いて，いかなるプロフィールにおいても 2 人の個人が pivotal であることはない。」

$$\text{2 人の選択集合がともに 2 つだけの選択肢を含み，しかもそれらが完全に一致する場合} \tag{7.1}$$

そうではないと仮定し，その pivotal な 2 人を i，j とする。そうするとあるプロフィール p において $x = f(p)$，$x,y \in o(i,p)$，$x,z \in o(j,p)$ となるような互いに異なる選択肢 x，y，z が存在する。次のようなプロフィール p' を考える。

(i) i，j 以外の人々の選好は p と同じ，すなわち $k \neq i,j$ について $P'_k = P_k$。

(ii) zP_ix ならば $P'_i = {}^zP_i$，xP_iz ならば $P'_i = {}_zP_i$。

(iii) yP_jx ならば $P'_j = {}^yP_j$，xP_jy ならば $P'_j = {}_yP_j$。

$x = f(p)$ であるから zP_ix の場合 z は i の選択集合に含まれない。同様に yP_jx の場合 y は j の選択集合に含まれない。$P'_i \in r(P_i,x)$（i の選好における x と z の関係は変化していない），$P'_j \in r(P_j,x)$（j の選好における x と y の関係は変化していない）なので (2)，(3) により $f(p') = x$，$o(i,p') = o(i,p)$，$o(j,p') = o(j,p)$ である。ここでプロフィール p'' を次のように定義する。

(i) i，j 以外の人々の選好は p と同じ，すなわち $k \neq i,j$ について $P''_k = P_k$。

(ii) xP_iz（したがって xP'_iz）ならば $P''_i = {}^yP'_i$。zP_ix（したがって zP'_ix）ならば $P''_i = {}^z({}^yP_i)$。前者の場合 z が選好の最下位で y が最上位になる。後者の場合は z が最上位で

y がそれに続く。

(iii) xP_jy（したがって xP'_jy）ならば $P''_j =^z P'_j$。yP_jx（したがって yP'_jx）ならば $P''_j =^y ({}^zP_j)$。前者の場合 y が選好の最下位で z が最上位になる。後者の場合は y が最上位で z がそれに続く。

このとき z が個人 i の選好の最上位にあるときには $o(i,p')$ に含まれない（$o(i,p')=o(i,p)$ より）ので $y=C(o(i,p'),P''_i)$ である。同様に y が個人 j の選好の最上位にあるときには $o(j,p')$ に含まれない（$o(j,p')=o(j,p)$ より）ので $z=C(o(j,p'),P''_j)$ である。したがって (1) により $f(p'/P''_i)=y$ かつ $f(p'/P''_j)=z$ である（$o(j,p')=o(j,p'/P''_j)$, $o(i,p')=o(i,p'/P''_i)$ である）。$P''_i\in r(z,P'_i)$, $P''_j\in r(y,P'_j)$ であるから (2) により $f((p'/P''_j)/P''_i)=z$ かつ $f((p'/P''_i)/P''_j)=y$ でなければならない。しかし $y\neq z$ であるからこれは矛盾である。したがって (7.1) のような場合を除いて 2 人の個人が pivotal であることはない。

(5).「あるプロフィール p においてある個人 i の選択集合が 3 つ以上（2 つより多い）の選択肢を含むならば社会的選択関数 f の値域，すなわち f によって選ばれる可能性のある選択肢の集合は i の選択集合と一致する。したがって i は独裁者である。」

まず定義上すべての人々にとってすべての P'_i について $o(i,p)=o(i,p/P'_i)$ である。$C(o(i,p),P'_i)=w$ のとき（またそのときにのみ）$P_i\in\mathscr{P}_w$ というような形で個人の選好の集合 $\mathscr{P}$ をいくつかの部分集合 $\mathscr{P}_w$ に分ける。(1) により $P'_i\in\mathscr{P}_w$ ならば $f(p/P'_i)=C(o(i,p),P'_i)=w$ である。また (4) によりプロフィール p/P'_i において i 以外の誰も pivotal ではない。以上のことから個人 i の任意の P'_i，個人 $j(\neq i)$ の任意の選好 P''_j について $f((p/P''_j)/P'_i)=f((p/P'_i)/P''_j)=C(o(i,p),P'_i)$ が言える。これは $f(p/P'_i)=C(o(i,p),P'_i)$ と, 個人 $j(\neq i)$ が pivotal でないことから導かれる。したがって $o(i,p/P''_j)=o(i,p)$ である。あるプロフィール p において個人 i は，自分の真の選好 P'_i を表明することによって P'_i において最も好む選択肢（$C(o(i,p),P'_i)$）を実現することができる。さらに他の人々（j）の選好の変化は f の結果に影響を及ぼさないから，任意のプロフィールにおいて P'_i から見て最良の選択肢を実現できる。よって i は独裁者である。

(6).「プロフィール p において 2 人以上の個人が pivotal であり，彼らの選択集合に含まれる選択肢が x と y であるとする。x，y を各個人の選好の最下位に移して得られるプロフィールを p' とする。x と y の相対的な位置，および他の選択肢同士の相対的な位置は変わらない。このとき $f(p)=f(p')$ であり，pivotal である人々の集合は p と p' において同一である。」

$f(p)=x$，p において pivotal である人々の集合を V とする。すべての i について $f(p/P'_i)=x$ であり，V の人々は p/P'_i においても pivotal であることを示せばよい。ある個人 i の選好 P_i が変化したとき，(2) によって他の人々の選択集合は変わらないから少なくとも 1 人の pivotal な人の選択集合は変わらない。したがって (1) によって $f(p/P'_i)=x$ であり，すべての人々の選好が P_i から P'_i に変化しても f は x を選ぶ。さらに以下の事実によって V の人々は pivotal であり続け，それ以外の人が pivotal となることはない。

(i)「i と j が p において pivotal であれば両者は p/P'_i においても pivotal である。」

まず定義上 i は p/P'_i においても pivotal であり $f(p/P'_i)=x$ である。j も p におい

て pivotal であるから $f(p/_x P_j) = y$ である（$y = C(o(j,p),_x P_j)$ であるから）。j が p/P'_i において pivotal ではないとすれば $f((p/P'_i)/_x P_j) = x$ となる（$f(p/P'_i) = x$ より）。そのとき $xP_i y$（$o(i,p) = \{x,y\}$ かつ $f(p) = x$）であり $(p/P'_i)/_x P_j = (p/_x P_j)/P'_i$ であるから，個人 i は $p/_x P_j$ において選好 P'_i を表明することによって f を操作することが可能となる。

(ii)「p において i が pivotal で j が pivotal でないとすると j は p/P'_i においても pivotal でない。」

まず i が p において pivotal であれば p/P'_i においても pivotal でなければならない。j も p/P'_i において pivotal であるとすると (i) により p においても pivotal になってしまう。したがって j は p/P'_i において pivotal ではない。

(iii)「p において i が pivotal でなく j が pivotal であるとすると j は p/P'_i においても pivotal である。」

i は p において pivotal ではないから $f(p/P'_i) = x$ であり（i の選好の変化によって f の結果は変らない），j が p/P'_i において pivotal でないとすると $f((p/P'_i)/_x P_j) = x$ となる（j の選好の変化によって f の結果は変らない）。一方 p において j は pivotal であるから $f(p/_x P_j) = y$（$o(j,p) = o(j, p/_x P_j)$ で $y_x P_j x$ だから）であり，j の選好の変化によって i の選択集合は変らないので i は $p/_x P_j$ において pivotal ではないから $f((p/_x P_j)/P'_i) = y$ である。よって矛盾が生じる*42。

(iv)「p において i，j がともに pivotal でないとすると p/P'_i においても両者は pivotal でない。」

まず i が p/P'_i において pivotal であれば p においても pivotal でなければならないから，i が p において pivotal でなければ p/P'_i においても pivotal でない。j が p/P'_i において pivotal であるとすると (iii) より p においても pivotal でなければならない。したがって j が p において pivotal でなければ p/P'_i においても pivotal でない。

以上の議論を繰り返し適用すれば全員の選好が P'_i で表されるものに変化しても $f(p) = f(p')$ でありかつ pivotal な人々の集合は変らない。

(7).「3 つ以上の選択肢について pivotal な個人がいなければ f の値域は多くても 2 つの選択肢しか含まない。」

まず，誰も pivotal でなければ明らかに f は一定になってしまう。ある p において少なくとも 1 人が pivotal であるとする。(4) により，もし複数の人が pivotal であれば彼らの選択集合は 2 つの選択肢からなる共通の集合である。それらの選択肢を x，y とし $f(p) = x$ と仮定する。(6) により p において x，y はすべての人々の選好において最下位から 2 番目と最下位に位置していると考えることができる（どちらが最下位かはその人による）。ここで第 3 の選択肢 z があって，あるプロフィール p' において $f(p') = z$ であると仮定してみる。p から p' へ向けて順に 1 人 1 人選好が変化していくとすると，誰かの選好が変ったところで初めて f が x，y 以外の選択肢を選ぶときがある（その選択肢が z であるとは限らない

*42 このとき i が p/P'_i において pivotal であるとすると p においても pivotal でなければならないので p/P'_i において pivotal ではない。

が最後には z を選ぶ)。その個人を h としよう。選好が変化する前に h は x，y 以外の選択肢を x，y よりも好んでいた。したがって彼は選好が変化する前に変化したと偽りの表明をすることによって f を操作することが可能になる。これは矛盾であるから「3 つ以上の選択肢について pivotal な個人がいなければ f の値域は多くても 2 つの選択肢しか含まない」ことが言える。

以上をまとめると，社会的選択関数 f が戦略的に操作不可能で，かつその値域が 3 つ以上の選択肢を含んでいるならば，(7) によって誰か 1 人は 3 つ以上の選択肢について pivotal でなければならない。そのとき (5) によってその個人は独裁者となる。

☺

8 ギバード・サタースウェイトの定理の原論文 (Gibbard(1973, *Econometrica*))

Gibbard 自身はアローの一般可能性定理を用いてギバード・サタースウェイトの定理を証明している[*43]。この節では人々の選好において無差別な関係がある場合も含めるので個人の選好は R_i によって表される。R_i に含まれる厳密な選好は P_i で，無差別な関係は I_i で表す。プロフィール p において社会的選択関数が選ぶ選択肢はやはり $f(p)$ で表される。無差別関係を含まないある 1 つの選好を Q とする。Q はすべての人に共通なものであって，適当に選択肢を並べたものと思えばよい。Q において選択肢 x が y より上位にある場合 xQy と書く。

まず Z をいくつかの選択肢の集合として，ある個人の選好 R_i をもとに Z に含まれる選択肢を選好の上位に移してできる選好を考え，$R_i * Z$ で表す。Z の中の選択肢の順序は変えないが無差別なものがあれば Q に従って順序をつける。Z に含まれない選択肢の順序はすべて Q に従って変更する。$R_i * Z$ において選択肢 x が y より上位にある場合 $x(R_i * Z)y$ と書く。$R_i * Z$ は次に述べる性質をもつ。

(1). $x \in Z$ かつ $y \in Z$ ならば，xP_iy または「xI_iy で xQy」のときに $x(R_i * Z)y$（x と y を入れ替えても同様）

(2). $x \in Z$ かつ $y \notin Z$ ならば，$x(R_i * Z)y$（x と y を入れ替えても同様）

(3). $x \notin Z$ かつ $y \notin Z$ ならば，xQy のときに $x(R_i * Z)y$（x と y を入れ替えても同様）

$p * Z$ ですべての人々の選好が $R_i * Z$ であるようなプロフィールを表す（p はすべての人々の選好が R_i であるプロフィールである)。上の性質から $*$ で表される操作が持つ次の特徴がわかる。

(1). すべての個人 i について $R_i * Z$ は無差別な関係を含まない選好である。

(2).

$$Y \subseteq Z \text{ ならば} (p * Z) * Y = p * Y \tag{8.1}$$

[*43] 本節は A. Gibbard, “Manipulation of Voting Schemes: A General Result”, *Econometrica*, vol. 41, pp. 587-601, 1973. にもとづく。

$(p*Z)*Y$ は (R_i*Z) によって作られた各個人の選好（R'_i とする）に対してさらに R'_i*Y の操作を施して作られる選好のプロフィールである。Z に含まれる選択肢の内 Y に含まれないものは $(p*Z)*Y$ の操作によって Y よりも下位に追いやられ，しかもそれらは Z に含まれない選択肢とともに Q に従って並べられる。

(3). p と p' が Z の選択肢について一致するプロフィールであるとすると，$p*Z=p'*Z$ である。

Z に含まれない選択肢は Q に従って並べられるのでその部分で p と p' が異なっていても $p*Z$ と $p'*Z$ は同じものになる。

ここで

$$x \neq y \text{ で } x = f(p*\{x,y\})$$

のとき，またそのときにのみ xPy であると定義する。P は x と y に関する 1 つの社会的な選好を表している。P に対応して無差別関係を含む社会的選好 R を次のように定義する。

$$x = y \text{ または } y \neq f(p*\{x,y\}) \text{のとき，そのときのみ } xRy$$

したがって xPy は xRy を意味する。xIy（xRy であって xPy でないとき，あるいは xRy かつ yRx のとき）となるのは $x=y$ の場合と $x \neq f(p*\{x,y\})$ かつ $y \neq f(p*\{x,y\})$ のとき（それらの場合のみ）である。以下では x，y を含むすべての選択肢の組についてこのようにして定義される R がアローの一般可能性定理の条件を満たすことを明らかにしていく。p 以外のプロフィール，例えば p' から作られる社会的選好は R'，P' のように表される。

R が無関係選択肢からの独立性を満たすことは容易に示される。プロフィール p，p' において

$$xP_iy \text{ ならば } xP'_iy,\ xP'_iy \text{ ならば } xP_iy$$

$$yP_ix \text{ ならば } yP'_ix,\ yP'_ix \text{ ならば } yP_ix$$

であるとする。そのとき $Z=\{x,y\}$ とすると $p*\{x,y]=p'*\{x,y]$ であることがわかる。したがって $x=f(p*\{x,y])$ ならば $x=f(p'*\{x,y])$ であり，$x=f(p'*\{x,y])$ ならば $x=f(p*\{x,y])$ であるから xPy ならば $xP'y$ かつ $xP'y$ ならば xPy である。x と y を入れ替えても同様の関係が成り立つ。また $x,y \neq f(p*\{x,y])$ ならば $x,y \neq f(p'*\{x,y])$ であり，$x,y \neq f(p'*\{x,y])$ ならば $x,y \neq f(p*\{x,y])$ であるから xIy，$xI'y$ についても同じことが言える。したがって無関係選択肢からの独立性が成り立つ。

後はいくつかの手順を踏んで証明していく。

補題 8.1. 社会的選択関数 f は戦略的に操作不可能であると仮定する。あるプロフィール p において人々によって表明される選好のプロフィールを p' とする。社会的選択関数によって選ばれる可能性のある（f の値域に含まれる）2 つの異なる選択肢 x，y（$x \neq y$）について

(1). 誰も x と y について無差別ではない。

(2). 各個人について yP_ix ならば真の選好 R_i を表明する，すなわち $R'_i=R_i$。

(3). yRx である（R は上で定義した p から導かれる社会的選好）。

ならば $x \neq f(p')$ である。

この補題は，yP_ix という選好を持つ人々が真の選好を表明し，p から導かれる社会的選好が yRx であるならば，xP_iy という選好を持つ人々がどのような選好を表明しても f に x を選ばせることができないということを意味している。

証明. $x = f(p')$ であると仮定してみよう。プロフィール p^* を $p^* = p * \{x, y\}$ で定義すると，$x \neq y$ かつ yRx は $x \neq f(p^*)$ であることを意味する。ここで，人々に適当に番号をつけ p' から p^* へ人々の「表明する」選好が順に変っていくものとし，k 人の表明する選好が p^* に変ったときのプロフィールを p^k とする。したがって p^k において人々の選好は次のようになっている。R_i^k は p^k における人々の選好を表している。

(1). $i \leqq k$ ならば $R_i^k = R_i^*$
(2). $i > k$ ならば $R_i^k = R_i'$

$x = f(p')$，$x \neq f(p^*)$ であるからこのような選好の変化の過程で初めて $f(p^k) \neq x$ となる k がある。p' と p^* における各個人の選好が異なるとは限らないが，f が選ぶ選択肢が変るためには当然ある個人の選好が変らなければならない。

2 つのケースに分ける。

(1). $f(p^k) = y$ かつ yP_kx
$f(p^{k-1}) = x$（k の選好が変化するまでは x が選ばれていた）なので k は $f(p^{k-1})$ よりも $f(p^k)$ を好むことになる。仮定により k は p' において真の選好（P_k）を表明していたから彼は p^{k-1} において真の選好が P_k であるときに偽りの選好 P_k^* を表明して f を操作することができる。

(2). $f(p^k) \neq y$ または xP_ky
まず $f(p^k) \neq y$ ならば $xP_k^*f(p^k)$ である（P_k^* は p^* における k の選好)。一方 $f(p^k) = y$ のときは xP_ky であり，p^* の作り方から xP_k^*y なので，やはり $xP_k^*f(p^k)$ となる。$f(p^{k-1}) = x$ であるから $f(p^{k-1})P_k^*f(p^k)$ が言える。したがって p^k において P_k^* を表明するよりも P_k' を表明した方がよりよい結果が実現できる。すなわち個人 k は p^k において f を操作することができる。

以上は戦略的操作不可能性に反する。したがって $x \neq f(p')$ でなければならない。 ☺

この結果からいくつかの事柄が導かれる。

系 8.2 (パレート原理). プロフィール p において，2 つの選択肢 x，y についてすべての個人の選好が xP_iy ならば xPy である。すなわち R（プロフィール p から導かれる社会的選好）はパレート原理を満たす。

証明. あるプロフィール p' において $f(p') = x$ とする。p' と p について

(1). p において yP_ix という選好を持つ人はいない。

(2). p において誰も x と y について無差別ではない。

となっている。もし（p から導かれる社会的選好を R として）yRx であれば，補題 8.1 のすべての仮定が満たされていて $f(p')=x$ であるということになる。これは補題の結論に反する。したがって xPy でなければならない。 ☺

系 8.3. 2 つの選択肢 x，y について，あるプロフィール p において誰も x と y について無差別でなく，かつ yRx ならば $f(p)\neq x$ である。

証明. 補題 8.1 におけるプロフィール p' を p と同一のもの，すなわちすべての人々が真の選好を表明すると仮定すると補題 8.1 のすべての仮定が満たされる。したがって補題の結論により $f(p')\neq x$ すなわち $f(p)\neq x$ である。 ☺

系 8.4. 2 つの選択肢 x，y について，あるプロフィール p において誰も x と y について無差別でなく，かつ $f(p)=x$ ならば xPy である。

これは系 8.3 の対偶であるが確認しておこう。

証明. 補題 8.1 におけるプロフィール p' を p と同一のもの，すなわちすべての人々が真の選好を表明すると仮定すると補題 8.1 の仮定の内 yRx 以外が満たされていて $f(p)=f(p')=x$ となっている。もし yRx ならば補題の結論に反するので xPy でなければならない。 ☺

補題 8.5. R は反射性，完備性，推移性を満たす。

証明. あるプロフィール p における社会的選好を R とする。

(1). $x=y$ または $x,y\neq f(p*\{x,y\})$ のときに xIy であるから反射性（$x=y$ ならば xRy）が成り立つ。

(2). xPy，yPx はそれぞれ

$$x\neq y \text{ かつ } x=f(p*\{x,y\})$$

$$x\neq y \text{ かつ } y=f(p*\{x,y\})$$

を意味する。これらと

$$x=y \text{ または } x,y\neq f(p*\{x,y\}) \text{のとき } xIy$$

を合わせるとすべてのケースが重複なく網羅されており，xPy または xIy のとき xRy，yPx または xIy のとき yRx であるから完備性（xRy または yRx）が成り立つ。

(3). 3 つの異なる選択肢 x，y，z をとりプロフィール p' を $p'=p*\{x,y,z\}$ と定義する。そのとき (8.1) により $p'*\{x,z\}=p*\{x,z\}$ である。したがって

$$x\neq z \text{ かつ } x=f(p*\{x,z\}) \text{のとき，そのときのみ } xPz$$

$$x\neq z \text{ かつ } x=f(p'*\{x,z\}) \text{のとき，そのときのみ } xP'z$$

であるから

$$xPz \text{ と } xP'z \text{ とは同じ意味}$$

になる。同様にして

$$xPy \text{ と } xP'y \text{ とは同じ意味，} yPz \text{ と } yP'z \text{ とは同じ意味}$$

である。さらに同様にして

$$yPx \text{ と } yP'x \text{ とは同じ意味，} zPy \text{ と } zP'y \text{ とは同じ意味，} zPx \text{ と } zP'x \text{ とは同じ意味}$$

であることが示され，したがって

$$xIy \text{ と } xI'y \text{ とは同じ意味，} yIz \text{ と } yI'z \text{ とは同じ意味，} xIz \text{ と } xI'z \text{ とは同じ意味}$$

も得られる*44。したがって社会的選好 R と R' とはまったく同じ内容になっている。われわれが証明すべきは

$$zRy \text{ かつ } yRx \text{ ならば } zRx \text{（} R \text{ の推移性）}$$

であるが，これは

$$zR'y \text{ かつ } yR'x \text{ ならば } zR'x \text{（} R' \text{の推移性）}$$

を証明することによって導かれる。$zR'y$ かつ $yR'x$ であって $xP'z$ であると仮定してみよう。このとき

$$x \neq z \text{ かつ } x = f(p' * \{x, z\}) \tag{8.2}$$

が成り立っている。ここでもし $x = y$ ならば $xP'z$ は $yP'z$ を意味し，$y = z$ ならば $xP'z$ は $xP'y$ を意味する。ともに「$zR'y$ かつ $yR'x$」に反する。残るは $x \neq y$ かつ $y \neq z$ の場合であるが，以下の 2 つのケースに分けて考える。

(i) $x = f(p')$ のとき：
この場合は系 8.4 により $xP'y$ となる。

(ii) $x \neq f(p')$ のとき：
$xP'z$ と仮定しているから，系 8.3 により $z \neq f(p')$ である。x，y，z 以外の選択肢 w をとる。p' の作り方からすべての人々が w より x を好む。したがって系 8.2（パレート原理）により $xP'w$ であり，また系 8.3 により $w \neq f(p')$ である。よって $x \neq f(p')$，$z \neq f(p')$，$w \neq f(p')$ が示されたから $y = f(p')$ でなければならない。そうすると系 8.4 により $yP'z$ が得られる。

以上により $xP'z$ と仮定すると $xP'y$ または $yP'z$ となり矛盾が生じることが明らかになった。したがって R' の推移性が成り立つが，これは R の推移性を意味する。

☺

以上によって社会的選択関数 f によって各プロフィールにおいて定義される社会的選好がアローの定理の「非独裁性」以外の条件を満たすことが示された。そのときアローの定理によって次の補題が成り立つ（これは証明を要しない）。

*44 xPy ではなく yPx ではないことが xIy であるという意味である。

補題 8.6. 社会的選択関数 f の値域が 3 つ以上の選択肢を含むならば，各プロフィールにおいて f によって定義される社会的選好は「非独裁性」を満たさない。すなわち独裁者が存在する。

最後に

定理 8.7. 補題 8.6 の独裁者は f の独裁者である。したがってギバード・サタースウェイトの定理が得られる。

証明.（ここの証明は少し変えてある）社会的選好の独裁者を個人 i とする。プロフィール p において個人 i が最も好む選択肢（複数あるかもしれない）の集合を Y とする。ある $x \notin Y$ をとって次のようなプロフィール p' においてすべての人々が正しい選好を表明するものとする。

(1). 個人 i ：すべての $y \in Y$ について $yP'_i x$
(2). それ以外（j で表す）：すべての $y \in Y$ について $xP'_j y$

このとき以下で示すように補題 8.1 の仮定が満たされている。

(1). p においてすべての人々が正しい選好を表明する。
(2). x と各 $y \in Y$ について無差別な人はいない。
(3). i は f によって定義される社会的選好の独裁者であるから，すべての $y \in Y$ について社会的選好は $yP'x$ である。

よって補題 8.1 によって $x \neq f(p')$ を得る。この結果はすべての $x \notin Y$ に当てはまる。したがって個人 i 以外の人々があらゆる Y 以外の選択肢について，Y に含まれるすべての選択肢よりもその選択肢 (x) を好んでいる場合には Y の選択肢の 1 つが f によって選ばれる。つまり i はそのようなプロフィールにおいて f の独裁者である。個人 i 以外の人々の選好がそのようなものに限定されないプロフィールを p として，個人 1 から始めて（$i \neq 1$ のとき，$i = 1$ なら 2 から始める）順に i 以外の人々の選好が p' における選好から p における選好に変っていくものとし，個人 k の選好が変化したときのプロフィールを p^k とする。p^k においてもすべての人々が正しく自分の選好を表明する。もし Y 以外のある選択肢 x について $x = f(p)$ であるとすれば，選好が変化する過程において初めて $f(p^k)$ が Y 以外の選択肢になる（$f(p^k) \notin Y$）ような k がある。そのとき個人 k は選好が変化する前において Y のどの選択肢よりも $f(p^k)$ を好んでいるから p^{k-1}（選好が変化する前のプロフィール）において p^k における選好を表明することによって f を操作することができる，

以上によって i は f の独裁者である。☺

9 strategy-proofness と strong positive association(Muller and Satterthwaite(1977))

Muller and Satterthwaite(1977) は，戦略的に操作不可能な社会的選択関数が strong positive association と呼ばれる条件を満たしていることを明らかにした[*45]。本節ではその問題を検討してみよう[*46]。この節では人々の選好は無差別関係を含まない厳密なものであるとし，それを P_i などで表す。そうでなければ strong positive association はそのままでは当てはまらない。

まず言葉を定義する。

strong positive association ある選択肢を x とし，それ以外のいくつかの選択肢を y で代表させる。あるプロフィール p において $f(p)=x$ であり，すべての個人について「p において xP_iy ならば p' においても xP'_iy である」とき $f(p')=x$ である。

p あるいは p' において誰かが x を最も好むとは仮定していない。誰にとっても，p において x より好まれない選択肢は p' においても x より好まれず，p において f が x を選ぶならば p' においても x を選ばなければならないという条件である。

次の定理を示す。

定理 9.1. ある社会的選択関数 f が戦略的に操作不可能ならば strong positive association を満たし，strong positive association を満たすならば戦略的に操作不可能である。

証明. (1).「戦略的に操作不可能ならば strong positive association を満たす。」

戦略的に操作不可能であるが strong positive association を満たさない社会的選択関数があると仮定する。そのとき互いに異なる選択肢 x，z，2 つのプロフィールについて

$$\text{すべての } i \text{ について，} xP_iz \text{ ならば } xP'_iz\text{，} f(p)=x \text{ かつ } f(p')=z$$

となる場合がある。人々に適当に番号をつけ個人 1 から順にその選好が P_i から P'_i に変化していくとする。$f(p)=x$，$f(p')=z$ であるから，何人目かの人の選好が変化したときに f が初めて x ではない選択肢を選ぶ時がある。その人を個人 j, 選択肢を u とする（u は z であるかもしれない)。2 つの場合がある。

(i) xP_iu のとき：この場合，strong positive association によって xP'_iu であるから個人 j は真の選好が P'_i のときに P_i を表明することによって f を操作することができる。

(ii) uP_ix のとき：この場合，個人 j は真の選好が P_i のときに P'_i を表明することによって f を操作することができる。

以上によって f は strong positive association を満たす。

(2).「strong positive association を満たすならば戦略的に操作不可能である。」

[*45] strong positive association は「単調性」(monotonicity) と呼ばれることもある。

[*46] 本節は E. Muller and M. Satterthwaite, “The equivalence of strong positive association and strategy-proofness”, *Journal of Economic Theory*, vol. 14, pp. 412-418, 1977. にもとづく。

strong positive association を満たす社会的選択関数 f が戦略的に操作可能であると仮定してみる。そうすると 2 つプロフィール p，p'，ある個人 i，2 つの選択肢 x，y，について

$$f(p)=x,\ f(p/P_i')=y,\ yP_ix$$

となる場合がある（yP_ix の代わりに $xP_i'y$ でもよい）。このとき個人 i は p において選好 P_i' を表明することによって f を操作することができる。選択肢の集合 A を次のようにして 3 つの部分集合に分ける。

$$W^+=\{z|zP_ix\} \tag{9.1}$$

$$X=\{z|xP_iz \text{ で } zP_i'x，\text{または } z=x\} \tag{9.2}$$

$$W^-=\{z|xP_iz \text{ で } xP_i'z\} \tag{9.3}$$

この 3 つの集合で A 全体をカバーしている。P_i と P_i' をもとに次のような選好 Q_i を作る。

$$s\in W^+\text{かつ（}t\in X \text{ または } t\in W^-\text{）のとき } sQ_it \tag{9.4}$$

$$s\in X \text{ かつ } t\in W^-\text{のとき } sQ_it \tag{9.5}$$

$$s,t\in W^+\text{のとき，} sP_it \text{ ならば，またそのときのみ } sQ_it \text{（}P_i\text{と }Q_i\text{は同じ）} \tag{9.6}$$

$$s,t\in X \text{ のとき，} sP_i't \text{ ならば，またそのときのみ } sQ_it \text{（}P_i'\text{と }Q_i\text{は同じ）} \tag{9.7}$$

$$s,t\in W^-\text{のとき，} sP_it \text{ ならば，またそのときのみ } sQ_it \text{（}P_i\text{と }Q_i\text{は同じ）} \tag{9.8}$$

Q_i においては W^+ の選択肢は W^-，X の選択肢よりも上位に，X の選択肢は W^- の選択肢よりも上位に位置づけられている。また W^+ に含まれる選択肢同士と W^- に含まれる選択肢同士については P_i と同じ選好が割り当てられ，X に含まれる選択肢同士については P_i' と同じ選好が割り当てられる。X の作り方から $s\in X$ で $s\neq x$ であれば sQ_ix である。

$f(p/Q_i)=w$ とする。w について 3 つの場合がある。

(i) $w\in W^+$ の場合

このとき $z\in A$ について，$z\in X$ または $z\in W^-$ のときには (9.4) と各集合の定義により，また $z\in W^+$ のときは (9.6) により

$$wQ_iz \text{ ならば } wP_iz \text{ である。}$$

が成り立つ。p と p/Q_i とでは個人 i の選好のみが異なるだけなので strong positive association により $f(p/Q_i)=w$ ならば $f(p)=w$ でなければならない。しかし仮定により $f(p)=x$ であり $x\notin W^+$ なので $w=x$ とはなりえず矛盾が生じる。

(ii) $w \in X$ の場合
このとき $z \in A$ について，(9.2) より $w \neq x$ ならば xP_iw かつ wP'_ix である。また (9.3) より $z \in W^-$ ならば xP'_iz であるから（推移性により）wP'_iz である（このとき wQ_iz でもある）。(9.4) と各集合の定義により $z \in W^+$ ならば zP_iw かつ zQ_iw，そして (9.7) より $z \in X$ ならば wQ_iz のとき wP'_iz である。したがって次の関係が得られる。

$$wQ_iz \text{ ならば } wP'_iz \text{ である。}$$

が成り立つ。p/P'_i と p/Q_i とでは個人 i の選好のみが異なるだけであるから strong positive association により $f(p/Q_i) = w$ ならば $f(p/P'_i) = w$ でなければならない。しかし仮定により $f(p/P'_i) = y$ であり W^+ の作り方から $y \in W^+$ なので（yP_ix であるから）$w = y$ とはなりえず矛盾が生じる。

(iii) $w \in W^-$ の場合
このとき $z \in A$ について，(9.4)，(9.5) より $z \in W^+$ または $z \in X$ ならば zQ_iw であり，(9.8) より $z \in W^-$ ならば wQ_iz のとき wP_iz である。したがって次の関係が得られる。

$$wQ_iz \text{ ならば } wP_iz \text{ である。}$$

やはり p と p/Q_i とでは個人 i の選好のみが異なるだけなので strong positive association により $f(p/Q_i) = w$ ならば $f(p) = w$ でなければならない。しかし仮定により $f(p) = x$ であり $x \notin W^-$ なので $w = x$ とはなりえず矛盾が生じる。

以上で証明が終わった。 ☺

10 複数の選択肢を選ぶ社会選択ルールについて (Duggan and Schwartz(2000))

ここまで分析してきた社会的選択関数は人々の選好のプロフィールに対応して 1 つだけの選択肢を選ぶものであった。選択肢を選ぶ方法としては例えば何らかの形での投票などが考えられるが，複数の選択肢が同数の票を集める可能性がある。1 つの選択肢を選ぶ社会的選択関数では，そのような場合は何らかの予め定まった方法で 1 つを選ぶものとする。例えば選択肢の名前のアルファベット順（50 音順でもよい）や，同数になった選択肢の中から番号をつけた個人の内 1 番目の人が好むものを選ぶなどの方法が考えられる。確率的な方法は含めない。一方で複数の選択肢が同点になればそのまま複数選んでしまうということも考えられる。このように人々の選好に応じて複数になる場合も含めていくつかの選択肢を選ぶ社会選択ルールを「社会的選択対応 (social choice correspondence)」と呼ぶ。社会的選択対応についての戦略的操作不可能性の問題を考えるのであるが，ある人の選好が変化する前も変化した後も複数の選択肢が選ばれる可能性があるので選択肢の集合に対する人々の選好を考える必要があり，戦略的操作不可能性にもさまざまな定義があり得

る。本節では Duggan and Schwartz(2000) による定義にもとづいて分析していく*47。

人々の選好は無差別関係を含まない厳密なものであるとし P_i で表す。選好のプロフィール p に対応して複数の選択肢の可能性も含めて最低 1 つの選択肢を選ぶような社会選択ルール，社会的選択対応を f で表し，選好のプロフィール p において f が選ぶ選択肢の集合を $f(p)$ とする。人々の選好 P_i に対して効用関数 u を xP_iy のとき（またそのときのみ）$u(x) > u(y)$ となるように定義すると，その効用関数で選好を表現することができる。また選択肢のある集合 X に含まれる選択肢 x に対してある確率を割り当てそれを $\lambda(x)$ とする。λ でそのときの確率分布を表す。$\sum_{x\in X}\lambda(x)=1$ である。以下では次の定理を証明する。

定理 10.1. 社会的選択対応 f が選ぶ選択肢の集合 A が 3 つ以上の選択肢を含むとき，次の 4 つの条件のすべてを満たす社会的選択対応は存在しない。

$\not\mathrm{M}$（戦略的操作不可能性）　あるプロフィールを p，p においてある 1 人の人（i で表す）の選好だけが P'_i に変ったプロフィールを p' とする。p における個人 i の選好を表現する効用関数を u，$f(p)$ および $f(p')$ に含まれる選択肢に割り当てられる確率分布をそれぞれ λ，λ' とする（それぞれ $f(p)$，$f(p')$ に含まれるどの選択肢にも正の確率を割り当てる）。そのとき $f(p)$ および $f(p')$ に含まれる選択肢に**どのように確率を割り当てても**

$$\sum_{x\in f(p')}\lambda'(x)u(x) > \sum_{x\in f(p)}\lambda(x)u(x)$$

であれば f は p において個人 i によって操作可能となる。「どのようなプロフィールにおいても，誰によっても f は操作可能ではない」というのがこの条件の意味である。確率分布にもとづく期待効用を比較しているが，いかなる確率を割り当てた場合でも偽りの選好を表明した方が利益になるときに操作可能であると定義しているので特定の確率分布には依存しない。

CS(Citizen's Sovereignty)　すべての $x\in A$ について $x\in f(p)$ となるプロフィール p がある。

$\not\mathrm{D}$（非独裁性）　すべてのプロフィール p においてある個人 i が最も好む選択肢 x のみが f によって選ばれる（$x=f(p)$）とき i は独裁者であるが，この条件はそのような独裁者がいないことを求める。

RR(Residual resoluteness)　あるプロフィールにおいて，ある 1 人の人（i）以外の人々の選好が同一であり，かつ x を最も好んでいて y をその次に好んでいるとする。P_i（個人 i の選好）は他の人々の選好と同じであるか，または x と y が逆になっていて他の部分は同じであるとする。そのとき f は 1 つの選択肢のみを選ぶ。

条件 $\not\mathbf{M}$ は f が 1 つの選択肢しか選ばない場合にはギバード・サタースウェイトの定理における戦略的操作不可能性と同じ条件になっている。したがってそこで見た次の例はこの節の定理についても選択肢の数が 3 つ以上でなければならないということの例証になる。

各プロフィール p において，f は個人 1 または 2 が最も好む選択肢を選ぶ（いずれか 1 つ）

*47 本節は J. Duggan and T. Schwartz, "Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard-Satterthwaite theorem generalized", *Social Choice and Welfare*, vol. 17, 85-93, 2000. にもつづく

条件 **RR** は人数が少ない（例えば 2 人）の場合などでは説得力のあるものではないが，人数の多い社会を考えれば納得できる条件であろうと思われる。これがなければ独裁者の存在を導くことはできない。

証明の前に言葉と記号を定義する。

top set（「最良選択肢集合」とでも訳せる） 選択肢のある集合 X をとる。すべての人々が X に含まれるどの選択肢をも $A \setminus X$（X に含まれない選択肢の集合，この場合は A における X の補集合）に含まれるどの選択肢より好むとき X を top set と呼ぶ。

xy-twin あるプロフィール p と別のプロフィール p' において，すべての人々の選好について「xP_iy ならば（またそのときのみ）$xP_i'y$」（つまり x と y に関する人々の選好は同一）となっている場合 p' は p の xy-twin であると言う。このとき p は p' の xy-twin である。

社会的選択対応から導かれる二項的社会選択ルール（社会的選好） 社会的選択対応 f をもとに以下のようにして社会的選好 F を作る。

> あるプロフィール p の xy–twin になっていて top set が $\{x, y\}$ であるような
> プロフィール p'のすべてにおいて $\{x\} = f(p')$であって $x \neq y$ であるとき
> $xF(p)y$ と定義する

$xF(p)y$ は F によれば社会は y より x を好むということを意味する。

$xF(p)y$ と $yF(p)x$ が同時に成り立つことはないのでこれは非対称 (asymmetric) な二項関係，すなわち厳密な選好関係である。$xF(p)y$ でも $yF(p)x$ でもないとき，つまり $x = y$ のとき，またはプロフィール p' によって $f(p') = \{x\}$ となったり，$f(p') = \{y\}$ となったり，$f(p') = \{x, y\}$ となったりする場合には $xI(p)y$ であると定義し，「$xP(p)y$ または $xI(p)y$」を $xR(p)y$，「$yP(p)x$ または $xI(p)y$」を $yR(p)x$ と定義すると「完備性」が成り立つ。$x = y$ ならば $xI(p)y$ すなわち $xR(p)y$ かつ $yR(p)x$ が成り立つので反射性が成り立つ。また F は次の条件を満たしている。

無関係選択肢からの独立性 (independence of irrelevant alternatives, IIA) あるプロフィール p^1 が p の xy-twin であれば F の定義に現れている p' は p^1 と p とで共通となるので「$xF(p)y$ ならば $xF(p')y$」もその逆も成り立つから，F による x と y に関する社会的選好は同じになり，無関係選択肢からの独立性が満たされている。

いくつかの段階に分けて証明していこう。証明には寡頭制定理を用いる。

補題 10.2 (M-Lemma). あるプロフィール p とは個人 i の選好のみが異なる（P_i から P_i' に変化している）別のプロフィール p' において $x \in f(p')$ ならば以下の事実が得られる。

(1). x，または P_i' で見て x より下位に位置する y が $f(p)$ に含まれる。かつ
(2). x，または P_i で見て x より上位に位置する y が $f(p)$ に含まれる。

証明. $f(p)$ および $f(p')$ に含まれる選択肢に割り当てられる確率分布をそれぞれ λ，λ' とする。もし (1) が成り立たなければ，すべての $z \in f(p)$ について $zP_i'x$ であるから P_i' を表現するある効

用関数 u' を選んで

$$\sum_{z\in f(p)} \lambda(z)u'(z) > \sum_{z\in f(p')} \lambda'(z)u'(z)$$

となるようにできる（$u'(x)$ の値を極めて小さなものにすればよい，逆に言えば $f(p)$ に含まれる z について $u'(x)$ と比較して $u'(z)$ を十分大きくする)。そのとき個人 i は p' において選好 P_i を表明することによって f を操作することができる。

一方 (2) が成り立たないとすると，すべての $z \in f(p)$ について xP_iz であるから P_i を表現するある効用関数 u を選んで

$$\sum_{z\in f(p')} \lambda'(z)u(z) > \sum_{z\in f(p)} \lambda(z)u(z)$$

となるようにできる（$u(x)$ の値を極めて大きなものにすればよい，逆に言えば $f(p)$ に含まれる z について $u(x)$ と比較して $u(z)$ を十分小さくする)。そのとき個人 i は p において選好 P'_i を表明することによって f を操作することができる。 ☺

補題 10.3 (Topset Lemma). X がプロフィール p における top set であるならば $f(p) \subseteq X$ である（$f(p)$ は X に含まれる)。

証明. そうではない，すなわち X に含まれない $f(p)$ の選択肢があると仮定する。それを y（$y \in f(p) \setminus X$）とする[*48]。任意の選択肢 $x \in X$ について次の条件を満たすプロフィール p^x を作る。

> 「すべての人々について P_i^xは x を最も好み，ある共通の選択肢を 2 番目に好むという点で共通である。」

x と 2 番目に好む選択肢の共通性以外には条件はない。**CS** によってあるプロフィール p^* においてて $x \in f(p^*)$ となる。（人々に適当に番号をつけ）個人 1 から順にその選好が P_i^* から P_i^x に変っていくものとする。k 人の選好が変化したときのプロフィールを p^{*k} とすると，x はすべての P_i^x において最も好まれる選択肢であるから $\not{\mathbf{I}}\mathbf{M}$-Lemma の (2) によって x は常に $f(p^{*k})$ に含まれる。したがって $x \in f(p^x)$ であり，また **RR** によって $x = f(p^x)$ となる。

次にプロフィール p から p^x へ向けて個人 1 から順に選好が変化していくものとし，まず個人 1 の選好が変化したときのプロフィールを p^1 とすると $\not{\mathbf{I}}\mathbf{M}$-Lemma の (1) によって y または P_1 で見て y より下位の選択肢が $f(p^1)$ に含まれる。X は p の top set であり $y \notin X$ なので P_i で見て y より下位の選択肢も X には含まれない。したがってどちらの場合でも X に含まれない選択肢が $f(p^1)$ に含まれる。この操作を繰り返していくと $z \notin X$ について $z \in f(p^x) = \{x\}$ が得られる。しかし $x \in X$ であるから矛盾が生じる。よって $f(p) \subseteq X$ である。 ☺

補題 10.4 (Dominance Lemma). プロフィール p において，$f(p) = \{x\}$ かつ $x \neq y$ ならば $xF(p)y$ である。

[*48] この場合 $f(p) \setminus X$ は $f(p)$ に含まれる選択肢の内で X に含まれないものの集合を現す。X が $f(p)$ の部分集合であるというのはではないから $f(p)$ における X の補集合というわけではない。$f(p) \cap X$ の補集合にはなっている。

証明. そうではない，すなわち（F の定義から）p の xy-twin であって top set が $\{x, y\}$ であるようなある p' について $f(p') \neq \{x\}$ であると仮定してみよう。p' から p へ向けて個人 1 から順に選好が変化していくものとするとある人（個人 k とする）の選好が変化したときに f が選ぶ選択肢の集合が $Y \neq \{x\}$ から $\{x\}$ に変化するところがある（$f(p) = \{x\}$ であるから）。その選好の変化の前に x 以外のある選択肢 z が f によって選ばれている，すなわち $z \in Y$ であるとすると $\not\mathbf{IM}$-Lemma の (1) によって z または P'_i で見て z より下位に位置するある選択肢が $\{x\}$ に含まれなければならない。$x \neq z$ であるから，これは zP'_ix を意味する。$\{x, y\}$ は p' の top set なので $z = y$ であって yP'_ix であるということになる。一方 $\not\mathbf{IM}$-Lemma の (2) によって y または P_i で見て y より上位に位置するある選択肢が $\{x\}$ に含まれなければならない。$y \neq x$ であるから，これは xP_iy を意味する。しかし yP'_ix であって p' が p の xy-twin であるから矛盾が生じる。よって $xF(p)y$ でなければならない。 ☺

補題 10.5 (3-Undomination Lemma). プロフィール p において，$x \in f(p)$ で $\{x, y, z\}$ が p の top set ならば $yF(p)x$ ではない。

証明. 互いに異なる選択肢 x，y，z について，p をもとに次の条件を満たすプロフィール p^{xy} を作る。

> すべての人々について，P_iにおいて z を x と y のいずれか下位にある方のすぐ下に移した選好を P_i^{xy}とする。他の部分の選好は P_iと同じである。

p^{xy} においてすべての人々は x，y 以外の選択肢より x，y を好むので $\{x, y\}$ が top set になる。p から p^{xy} へ向けて個人 1 から順に選好が P_i から P_i^{xy} に変化していくものとする。各個人 i について xP_iy ならば x は P_i^{xy} において最良の選択肢となるので，$\not\mathbf{IM}$-Lemma の (2) によって P_i から P_i^{xy} へ選好が変化したときに x は f によって選ばれる選択肢の集合に含まれ続ける。もし yP_ix であるとすると $\not\mathbf{IM}$-Lemma の (1) によって x または P_i で見て x より下位に位置する選択肢 w が f によって選ばれる。しかし，$\{x, y, z\}$ が top set であり続けるので Topset Lemma によって $w = z$ でなければならない。z は P_i で見て x より下位に位置し，しかも yP_ix であるから yP_ixP_iz となり P_i と P_i^{xy} とは同一の選好ということになる。したがって p から p^{xy} へ向けた選好の変化によっても x が選ばれ続ける。よって $x \in f(p^{xy}) \neq \{y\}$ が導かれる。しかし p^{xy} は $\{x, y\}$ を top set として持つ p の xy-twin であるから F の定義によって $yF(p)x$ とはならない。 ☺

補題 10.6 (Unanimity Lemma). プロフィール p において，すべての人々について xP_iy ならば $xF(p)y$ である。

証明. p' を $\{x, y\}$ を top set として持つ p の任意の xy-twin とすると $\{x\}$ も p' の top set である。したがって Topset Lemma によって $f(p) = \{x\}$ であるから $xF(p)y$ を得る。 ☺

これは社会的選好 F が「パレート原理」を満たすという意味になる。

補題 10.7 (Nonblocker Lemma($\not{\mathbf{B}}$)). 以下のような個人 i は存在しない。

> すべての x，y について個人 i が xP_iy で他のすべての人々（j で表す）が yP_jx のとき $yF(p)x$ とならない。

これは社会的選好 $F(p)$ について拒否権者がいないという条件である。しかし，この定義による拒否権者は寡頭制定理での拒否権者の定義（3 ページ）と少し意味が異なる。そこでは

すべての x，y について個人 i が xP_iy ならば「他の人々の選好に関わらず」$yF(p)x$ とはならない。 (10.1)

という意味であった。以下ではこの意味での拒否権者の非存在を証明する。

証明. 任意の i をとる。$\not{\mathbf{D}}$（独裁者の非存在）により，あるプロフィール p において 2 つの選択肢 x，y について個人 i が x を最も好んでいて $y \in f(p)$（$x \neq y$）となる場合がある。p' として次のようなプロフィールを作る。

> 個人 i は x を最も好み y をその次に好む。i 以外の人には y を最も好み x をその次に好む人（j で代表させる）と i と同様に x を最も好み y をその次に好む人（k で代表させる）がいる。x，y 以外の選択肢に関する選好は全員同じである。

個人 j の選好が P_j から P'_j に変化したときには $\not{\mathbf{M}}$-Lemma の (2) によって y が f によって選ばれ続ける。また個人 i または k の選好が P_i から P'_i（P_k から P'_k）に変化したときには $\not{\mathbf{M}}$-Lemma の (1) によって y または P'_i で見て y より下位に位置する選択肢 $z \neq x$ が f によって選ばれる（xP'_iy なので $z \neq x$）。Topset Lemma によって $f(p') \subseteq \{x, y\}$ であるから $y \in f(p')$ である。したがって **RR** によって $f(p') = \{y\}$ となる。よって Dominance Lemma により $yF(p')x$ となるから (10.1) のような性質を持つ個人は存在しない。 ☺

最後に次の補題を証明する。

補題 10.8 (Transitivity（推移性）). $xF(p)y$ かつ $yF(p)z$ ならば $xF(p)z$ である。

証明. p' として p の xy-twin，yz-twin，xz-twin となっていて，top set が $\{x, y, z\}$ であるものをとる。p' と p では x，y，z に関する人々の選好が同一である。このとき Topset Lemma によって $f(p') \subseteq \{x, y, z\}$ が得られ，また上で示した IIA（無関係選択肢からの独立性）により $xF(p')y$ かつ $yF(p')z$ である。そのとき 3-Undomination Lemma によれば $y \in f(p')$ のとき $xF(p')y$ とはならず，$z \in f(p')$ のとき $yF(p')z$ とはならないので $f(p') = \{x\}$ でなければならない。したがって Dominance Lemma によって $xF(p')z$ でなければならず，IIA によって $xF(p)z$ が得られるから準推移性が成り立つ[*49]。 ☺

[*49] Duggan and Schwartz(2000) では Transitivity と表現されているがこれは厳密な選好のみの推移性，すなわち「準推移性」の意味である。

定理 10.1 の証明. 以上一連の補題によって A に含まれる選択肢の数が 3 以上であれば，社会的選好 F が，反射性，完備性，パレート原理，無関係選択肢からの独立性，推移性，拒否権者の非存在の条件を満たしている。しかし寡頭制定理（定理 3.1）によってそのような社会的選好はあり得ないから矛盾が生じる。よって $\not\mathbf{M}$，**CS**，$\not\mathbf{D}$，**RR** のすべてを満たす社会的選択対応は存在しない。 ☺

索引

著者略歴

田中靖人（たなか・やすひと）

1953 年　大阪府岸和田市春木生まれ
1976 年　京都大学工学部航空工学科卒業
1983 年　横浜国立大学大学院経済学研究科修士課程修了
1986 年　東京大学大学院経済学研究科博士課程単位修得
山形大学人文学部経済学科講師・同助教授
中央大学法学部助教授・同教授を経て
現在　同志社大学経済学部教授，博士・経済学（中央大学）
専攻　理論経済学，ゲーム理論とその応用，社会的選択理論

著書

『ゼロから始める経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）
『ゼロから始める国際経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）
『ゲーム理論と寡占』（中央大学出版部, 2001）

主要論文

“Tariffs and welfare of an exporting country in a free entry oligopoly under integrated markets”, *Oxford Economic Papers* Vol. 44, Oxford University Press, 1992.

“Export subsidies under dynamic duopoly”, *European Economic Review* Vol. 38, Elsevier, 1994.

“Long run equilibria in an asymmetric oligopoly”, *Economic Theory* Vol. 14, Springer-Verlag, 1999.

“A finite population ESS and long run equilibria in an *n* players coordination game”, *Mathematical Social Sciences* Vol. 39, Elsevier, 2000.

“Stochastically stable states in an oligopoly with differentiated goods: Equivalence of price and quantity strategies”, *Journal of Mathematical Economics* Vol. 34, Elsevier, 2000.

“Profitability of price and quantity strategies in a duopoly with vertical product differentiation”, *Economic Theory* Vol. 17, Springer-Verlag, 2001.

“Profitability of price and quantity strategies in an oligopoly”, *Journal of Mathematical Economics* Vol. 35, Elsevier, 2001.

“Evolution to equilibrium in an asymmetric oligopoly with differentiated goods”, *International Journal of Industrial Organization* Vol. 19, Elsevier, 2001.

“An alternative direct proof of Gibbard’s random dictatorship theorem”, *Review of Economic Design*, Vol. 8, Springer-Verlag, 2003.

“Oligarchy for social choice correspondences and strategy-proofness”, *Theory and Decision*, Vol. 55, Kluwer Academic Publishers, 2003.

E-Mail: yatanaka@mail.doshisha.ac.jp